

Fibonacci-talen och gyllene snittet

BENGT ULIN

Fibonacci-talen och gyllene snittet

Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM,
Göteborgs universitet
Box 160
405 30 Göteborg

Typografi och grafisk form: Roger Johansson
Bilder s. 8, 50, 51 och 52: IBL
Övriga bilder och figurer: Bengt Ulin

ncm.gu.se/bestallning
e-post: bestallning@ncm.gu.se
Fax: 031-786 22 00

© 2008 NCM
ISBN: 978-91-85143-06-1 Upplaga 1:1
Tryck: Livréna AB, 2008

Innehåll

INLEDNING	7
I LITE HISTORIA	9
Vem var då Fibonacci? 10	
Kaninproblemet 11	
2 HUR KAN MAN BERÄKNA STORA FIBONACCI-TAL?	13
En alternativ metod 16	
3 STORLEKSORDNINGEN HOS FIBONACCI-TALEN	17
4 NÅGRA VACKRA FORMLER	18
Linjära summor 18	
Uttryck av andra graden 19	
5 FIBONACCI-FÖLJDEN OCH GYLLENE SNITTET	21
Talet ϕ som kedjebråk 25	
6 FIBONACCI-TAL I PASCALS TRIANGEL	28
7 FIBONACCI-TAL I GEOMETRIN	31
Pentagrammet 31	
Konstruktion av ϕ samt inskrivning av 5- och 10-hörning i cirkel 34	
En "paradox" 36	
Ikosaeder och dodekaeder 36	
8 FIBONACCI-TAL I NATUREN	40

9	DELBARHET HOS FIBONACCI-TALEN	
	1, 1, 2, 3, 5,	43
	Euklides algoritm	44
	Fyra egenskaper	45
10	ANDRA FÖREKOMSTER AV FIBONACCI-TAL	49
	Gyllene snittet i konsten	49
	Fibonacci-tal i tekniken	53
	Fibonacci-tal i några vetenskaper	56
11	NÅGRA TALFÖLJDER SOM LIKNAR FIBONACCI-FÖLJDERNA	57
	Pells talföljd	57
	Talföljder med flera termer i rekursionen	58
	En annan typ av generalisering	59
12	ÖVNINGSUPPGIFTER	60
	Svar till problem med udda nummer	63
	REFERENSER	65
	A Utförliga verk	65
	B Övriga referenser	65
	SAK- OCH PERSONREGISTER	67

Inledning

Talföljder utgör ett spännande aritmetiskt fält. För den som blivit riktigt engagerad finns *A Handbook of Integer Sequences* av *NJA Sloane* [15], ett verk som omfattar inte mindre än 2 372 talföljder, var och en försedd med referens till böcker eller tidskrifter. Trots att talföljder erbjuder så mycket av fascination ger skolan dem alltför jämt föga utrymme; i skolan fokuserar man på aritmetiska och geometriska följder.

Bland talföljderna är Fibonaccis talföljd utan tvivel den mest berömda. Som vi ska se dyker den upp i många sammanhang, intressanta, vackra och ibland oväntade. Både Fibonacci-talen och de geometriska följderna spelar en framträdande roll i naturen och borde därför bli ett fruktbart kapitel i skolkursen.

Fibonaccis talföljd och den därmed förknippade proportion som kallas gyllene snittet har många gånger varit ett uppskattat tema på matematikbiennalerna.

Även i tidskrifts- och tidningsartiklar har temat tagits upp. Eftersom det länge saknats en utförlig framställning på svenska är det min förhoppning att den inte särskilt digra bok som NCM, Nationellt Centrum för Matematikutbildning, härmed ger ut ska täppa till en lucka och stimulera lärare till en engagerande matematikundervisning.

En del ställen i boken kan anses något avancerade, men det mesta bör vara rätt så tillgängligt, även för intresserade elever. Läsaren får bl a flera exempel på matematisk induktion, ett kraftfullt och elegant verktyg som ofta kommer till användning i bevis rörande talföljder. Det vore bra om induktionen efter en beklaglig strykning kunde tas in igen i gymnasieskolans kursplan. Det behövs mer *matematik* i skolmatematiken.

För värdefull och inspirerande hjälp med manuskriptet vill jag tacka Stefan Lundbäck.

Bengt Ulin



I

Lite historia

Fibonaccis ursprungsföljd börjar med talen 1, 1 och fortsätter på så vis att varje nytt tal är summan av de två närmast föregående. Hans talföljd $\{F_n\}$ blir sålunda

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Med två andra heltal a och b i början blir talföljden

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \dots \quad (*)$$

Om följdens betecknas $\{f_n\}$, så gäller rekursionsformeln

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

varvid Fibonaccis ursprungliga tal – som framgår av (*) – åter dyker upp.

I en del framställningar kallas den följd för vilken $a=1$ och $b=3$, dvs 1, 3, 4, 7, ..., för Lucas talföljd $\{L_n\}$ efter den franske matematikern *FEA Lucas* (1842–1891). Man kan låta Fibonacci ge namn åt samtliga talföljder av typ (*). Vi bevisar med induktion ett enkelt samband mellan $\{L_n\}$ och Fibonaccis egen följd:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \quad (n \geq 2, L_1 = F_1 = F_2 = 1, L_2 = 3) \quad (L)$$

Likheten gäller för $n=2$ och $n=3$. Vi antar att den gäller för $n=p-1$ och $n=p$.

$$\begin{aligned} \text{Vi erhåller då} \quad L_{p+1} &= L_{p-1} + L_p = (F_p + F_{p-2}) + (F_{p+1} + F_{p-1}) = \\ &= (F_p + F_{p+1}) + (F_{p-2} + F_{p-1}) = F_{p+2} + F_p. \end{aligned}$$

Antagandet medför alltså att (L) gäller även för $n=p+1$. Eftersom (L) gäller för $n=2$ och $n=3$, gäller (L) för $n=4$, osv. Därmed är induktionsbeviset klart.

Vem var då Fibonacci?

Fibonacci föddes omkring 1170 i Pisa, där hans far, Guglielmo Bonacci, var en framgångsrik köpman. Sonen hette egentligen Leonardo av Pisa men namnet ändrades småningom till Fibonacci ("son till Bonacci"). Familjen flyttade omkring 1190 till staden Bugia, numera den algeriska hamnstaden Bejaija vid Medelhavet. Fadern uppdrog åt en muslimsk lärare att undervisa Fibonacci i räkning. Det innebar bl a att ersätta de klumpiga romerska talen med de tio indiska siffror som vi använder i modifierad form. Fibonacci lärde sig även den aritmetik och algebra som araberna utvecklat under århundraden och som han kunde studera i ett verk *Hisab al-jabr w'almuqabalah* av den framstående persiska matematikern *al-Khwarizmi* (ca 825). Termen *al-jabr* i denna titel är ursprunget till ordet algebra.

I vuxen ålder fick Fibonacci företa affärsresor till flera länder runt östra delen av Medelhavet. När han återvände till Bejaija var han på det klara med det avsevärda företräde som den arabiska räknekonsten hade framför den romerska.

År 1202 utkom hans bok *Liber abaci* (Boken om räknekonsten) [11]. Den omfattar 15 kapitel alltifrån heltalen till lösning av ekvationer av olika svårighetsgrader. Fibonacci begagnade där de indo-arabiska siffrorna. Trots att boken blev något av en "bestseller" och kom ut i en utvidgad upplaga 1228 dröjde det ett par århundraden innan bankerna slopade de romerska bokstavstalen. Bankirerna fruktade förfälskningar. I och med att belopp skulle skrivas både med siffror och ord fick de nya siffrorna sitt genombrott. Vi skriver som bekant fortfarande belopp även med ord.

Att Fibonacci med sin bok banade väg för det indisk-arabiska talsystemet över hela världen har förstås haft stor betydelse i samhället. Ur matematisk synvinkel är hans insatser som matemati-

ker av betydligt större vikt. Utöver *Liber abaci* skrev Fibonacci de två böckerna *Practica geometricae* (1223) och *Liber Quadratorum* (Boken om kvadrattal, 1225) samt två skrifter *Flos* (Blommor) och *Epistola ad Magistrum Theodorum*, där han gav nya prov på sin kreativitet. Fibonacci gav exempel på hur man kan lösa ett geometriskt problem med hjälp av algebra och omvänt, en algebraisk uppgift med geometri. Han betraktas som den mest betydande talteoretikern under de 1 400 år som förflöt mellan greken *Diofantos* (omkr år 240) och fransmannen *Pierre de Fermat* (1601–1665). *Liber abaci* kom att utgöra standardverket för undervisning i matematik i de toskanska skolorna under tre århundraden.

Mest känd blev dock Fibonacci för den talföljd som uppkallats efter honom. Den uppkom ur ett något artificiellt kaninproblem.

Kaninproblemet

Ett nyfött kaninpar (en hane och en hona) förökar sig på följande sätt:

- ◆ paret blir könsmoget efter en månad (månad 1)
- ◆ det föder ett kaninpar (hane och hona) varje månad från och med månad 2
- ◆ varje nyfött kaninpar bidrar på samma sätt till förökningen som urparet
- ◆ inga kaniner dör under loppet av ett år

Fråga: hur många kaninpar finns det just i början av månad 12?

Till att börja med har vi alltså 1 par månad 0 och 1 par månad 1. Månad 2 finns urparet plus ett nyfött par, således 2 par. Om vi låter x , y och z vara antalet par tre månader i följd med nummer n , $n+1$, $n+2$, så gäller sambandet $z = y + x$, eftersom de y paren från månad $n+1$ lever vidare och föder x stycken nya par. Med indexbeteckning har vi alltså under det första året

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Man erhåller följden 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... och 144 vid ingången av månad 12.

I en tävling 1225 vid hovet hos kejsar Fredrik II var det första av tre problem att finna ett rationellt tal x sådant att både $x^2 + 5$ och $x^2 - 5$ är kvadrater på rationella tal. Beträffande Fibonaccis svar, se slutet av kap 13.

En som intresserade sig för Fibonacci-talen var astronomen *Johannes Kepler* (omkring 1600). Därefter fortsatte talföljden sin törnrosasömn fram till 1831 då den plötsligt aktualiserades i botaniken. Vi återkommer till detta och till Kepler längre fram.

2

Hur kan man beräkna stora Fibonacci-tal?

I Fibonacci-talföljder $\{f_n\}$ är de två första talen f_1 och f_2 givna. Tal med index från 3 beräknas som vi sett med rekursionsformeln

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (1)$$

Det berömda kaninproblem som Fibonacci tog med i andra upplagan av sin bok *Liber abaci* (1228) ledde till den viktiga "urföljden"

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, \quad (F)$$

en talföljd som drygt 600 år sedan senare upptäcktes i naturen i form av bladbråk hos barrträdens kottar och i bladställningarna hos en rad växtfamiljer och enskilda växter.

Om a och b är de två givna utgångstalen, uppkommer följden

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, \dots \quad (2)$$

och vi ser hur F strukturerar varje annan Fibonacci-följd.

Med hjälp av rekursionen (1) kan man beräkna Fibonacci-tal, en metod som ter sig föga elegant vid höga indextal. Man vill gärna, som vid rekursioner överhuvud, kunna utnyttja en formel för direktberäkning, inte minst för att se talens storleksordning. Den franske matematikern *JPM Binet* publicerade 1843 den formel som gäller för F . Vi ska här se på ett par metoder att härleda Binets formel och hur man sedan lätt skaffar sig liknande formler för vilken Fibonacci-följd (f -följd) som helst.

Vi ska utnyttja det faktum att om två följder $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är f-följder, så är även den linjära kombinationen $\{pa_n + qb_n\}$, där p och q är konstanter, en f-följd, eftersom rekursionen i (1) förblir gällande, om de två leden multipliceras med en konstant.

Om man väl funnit formeln för ett par icke-proportionella f-följder borde det vara möjligt att nå en generell formel genom en lämplig linjär kombination. Här kommer den geometriska följden 1, k, k^2 , k^3 , ... till användning. Den utgör samtidigt en f-följd om

$$k^{m+2} = k^{m+1} + k^m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

Alla dessa villkor uppfylls av de k-värden som utgör rötter till ekvationen

$$k^2 = k + 1,$$

dvs av $k = r$ och $k = s$, där

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{och} \quad s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Uppenbarligen utgör $\{r^m\}$ och $\{s^m\}$ två icke-proportionella följder.

Låt oss nu till att börja med söka konstanter p och q till en linjär kombination som gör följden $\{pr^{n-1} + qs^{n-1}\}$ identisk med F-följden 1, 1, 2, 3, 5, ...

Eftersom sambandet (1) är linjärt är det tillräckligt att bestämma p och q så att villkoren $F_1 = 1$ och $F_2 = 1$ uppfylls.

Vi söker alltså lösningsparet p, q till det linjära systemet (S):

$$p + q = 1 \quad (n=1)$$

$$pr + qs = 1 \quad (n=2)$$

Lösningen är

$$p = \frac{r}{\sqrt{5}}$$

$$q = -\frac{s}{\sqrt{5}}$$

och den ger

$$F_n = pr^{n-1} + qs^{n-1} = \frac{r^n - s^n}{\sqrt{5}}$$

för F-följden 1, 1, 2, 3, 5, ...

Därmed har vi härlett formeln

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, \quad n \geq 1 \quad (*)$$

Den upptäcktes 1718 av den franske matematikern *A de Moivre* men kallas *Binets formel* sedan landsmannen *J-P-M Binet* återupptäckte formeln 1843.

I det generella fallet, för en f-följd $\{u_n\}$, har man att byta ut ettorna i systemet (S) mot de två givna talen u_1 och u_2 ($u_1 \neq u_2$). Fallet $u_1 = u_2$ är redan avklarat, eftersom det ger en med F proportionell f-följd.

För att finna en direktformel för Lucas-följden 1, 3, 4, 7, ... ersätter vi systemet (S) ovan med systemet

$$\begin{aligned} p + q &= 1 \\ pr + qs &= 3 \end{aligned}$$

Detta system har lösningen $p = r$, $q = s$,
varav följer att det n:e Lucas-talet L_n är $r^n + s^n$, dvs

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad n \geq 1 \quad (\#)$$

Med konjugatregeln erhåller vi ur (*) och (#) direkt den vackra formeln

$$F_{2n} = F_n L_n$$

En alternativ metod

P Glaister [8] utgår från potensserien

$$S(x) = 1x + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots \quad (3)$$

där koefficienterna tillhör Fibonacci-följden 1, 1, 2, 3, 5, ...

Av (3) erhåller man

$$x^2S(x) + xS(x) = S(x) - x$$

$$\text{varav} \quad S(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad (4)$$

Eftersom nämnaren har två reella nollställen, kan man uppdelar $F(x)$ i partialbråk.

$$\text{Man erhåller} \quad S(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{1 - \alpha x} + \frac{b}{1 - \beta x} \quad (5)$$

$$\text{där} \quad \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \quad \text{och} \quad a = -b = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Serieutveckling av (5) ger

$$S(x) = a(1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots) + b(1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \dots)$$

Identifiering med (3) ger koefficienten för x^n , dvs $a\alpha^n + b\beta^n$, som man finner lika med F_n , dvs n :te talet i Fibonacci-följden 1, 1, 2, 3, ...

Man kommer på så sätt till samma resultat som förut, dvs (*).

3

Storleksordningen hos Fibonacci-talen

För Fibonacci-talen 1, 1, 2, 3, 5, ... gäller enligt (*), sid 15,

$$F_n = \frac{r^n - s^n}{\sqrt{5}} \quad n \geq 1 \quad (6)$$

där $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ och $s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Av $|s| < 1$ följer att s^n går mot noll då n växer obegränsat. Det innebär att termen r^n blir alltmer dominant. Vi kan dra två slutsatser:

1) F_n är asymptotiskt lika med $\frac{r^n}{\sqrt{5}}$,

dvs förhållandet $F_n / \frac{r^n}{\sqrt{5}}$ går mot 1, då n växer obegränsat

2) $\lim |F_n - \frac{r^n}{\sqrt{5}}| = 0$ då $n \rightarrow \infty$

Av $|s| < 1$ följer $|\frac{s^n}{\sqrt{5}}| < 0,5$ för alla n . Som framgår av (6) medför

detta att F_n är det heltal som (för alla n) ligger närmast $a_n = \frac{r^n}{\sqrt{5}}$.

Detta möjliggör en enkel beräkning av F_n med miniräknare. Exempelvis anger min miniräknare "609.99967" för a_{15} , således praktiskt taget $F_{15} = 610$. För a_{20} anger den med "6765." just $F_{20} = 6765$.

4

Några vackra formler

Linjära summor

Genom att använda den för Fibonacci-talen karakteristiska rekursionsformeln

$$f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$$

i differensformen $f_k = f_{k+2} - f_{k+1}$

för $k = 1, 2, 3$, etc

och addera ledvis kommer man utan svårighet till summaformeln

$$\sum_1^n f_k = f_{n+2} - f_2 \quad (7)$$

För Fibonacci's egen följd, $\{F_n\}$, dvs $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ gäller

$F_2 = 1$, varför f_2 då kan bytas ut mot en etta.

Vi fokuserar nu på F -följden $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ ($n \geq 1$).

Med utgångspunkt från $F_1 = F_2$ härleder man på samma sätt som för (7) formeln

$$\sum_1^n F_{2k-1} = F_{2n} \quad (8)$$

Genom att kombinera (7) och (8) erhåller man ännu fler formler för linjära summor, t ex

$$\sum_1^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$$

Uttryck av andra graden

Vi har i kap 1 noterat sambandet (L): $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ ($n \geq 2$, $L_1 = 1$).
Av formeln $F_{2n} = F_n L_n$ i samma avsnitt följer nu

$$F_{2n} = (F_{n+1} + F_{n-1}) F_n$$

Genom att här byta ut F_n mot $F_{n+1} - F_{n-1}$ erhåller vi likheten

$$F_{2n} = (F_{n+1} + F_{n-1})(F_{n+1} - F_{n-1})$$

eller

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \quad (9)$$

För $n = 6$ innebär (9) den pythagoreiska likheten

$$12^2 = 13^2 - 5^2$$

Genom insättning i Binet-formeln (*) bevisar man sambandet

$$F_n^2 - F_{n-k} F_{n+k} = (-1)^{n+k} F_k^2 \quad (n \geq 2, k < n)$$

Specialfallet $k = 1$ ger oss $F_n^2 = F_{n+1} F_{n-1} + (-1)^{n-1}$, (10)

en identitet som vi ska återkomma till i kap 7.

Genom direkt insättning i Binet-formeln bevisar man även likheten

$$F_{n+k} = F_{n-1} F_k + F_n F_{k+1} \quad (n \geq 2, k \geq 1) \quad (11)$$

till vilken vi återkommer i kap 9. Binets formel leder också till en rad andra samband, exempelvis mellan Fibonacci-talen och de pythagoreiska taltriplerna. Med tålamod och noggrann uppsikt på tecknen bevisar man identiteten

$$\{F_n F_{n+3}\}^2 + \{2F_{n+1} F_{n+2}\}^2 = F_{2n+3}^2 \quad (n \geq 1)$$

där högra sidan alltså motsvarar kvadraten på en hypotenus och vänstra sidan summan av kateternas kvadrater i en rätvinklig triangel.

I bevisföringen uppnår man betydande förenklingar med sambanden $rs = -1$, $r+s = 1$ och $r-s = \sqrt{5}$, där r och s är rötter till ekvationen $k^2 = k + 1$.

Ett par exempel: $n = 1$ och $n = 4$ ger tripeln 3,4,5 respektive 39,80,89.

Mellan produkterna $F_k F_{k+1}$ och kvadraterna F_k^2 råder ett förvånande, vackert samband:

$$\sum_1^n F_k^2 = F_n F_{n+1} \quad (12)$$

Man bygger beviset med fördel på likheten

$$F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k \quad (k \geq 2)$$

Med hjälp av ytterleden erhåller vi nämligen följande system:

$$F_1^2 = F_1 F_2$$

$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2$$

$$F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3$$

...

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$$

Ledvis addition ger (12).

Med induktion bevisar man tvillingformlerna

$$\sum_1^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$$

och

$$\sum_1^{2n} F_k F_{k+1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

5

Fibonacci-följden och gyllene snittet

I den hellenska matematiken spelar proportioner en viktig roll. Matematikerna byggde upp en proportionslära och pythagoreerna tillämpade den för att skapa en harmonilära. Ett av de enklare problemen i geometri var att dela en sträcka så att den kortare delen förhåller sig till den längre som denna bit förhåller sig till hela sträckan. Om vi låter sträckan ha enhetslängden 1 och betecknar den större delen med x ska således följande ekvation gälla:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

Den leder till andragradsekvationen $x^2 + x = 1$, en ekvation som är snarlik den ekvation som framkom vid härledningen av Binets formel. Vi ska här skriva ekvationens rötter som

$$x_1 = g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

och $x_2 = -G = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

Den positiva roten x_1 , dvs talet g , markerar läget för den sökta delningspunkten på vår enhetssträcka. Denna sägs bli delad i *gyllene snittets proportion* av talet g . Man finner lätt sambanden

$$G = 1 + g$$

och

$$g = 1/G$$

De approximativa värdena är med fyra decimaler

$$g \approx 0,6180$$

$$G \approx 1,6180$$

Binets formel får med de nya beteckningarna utseendet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{G^n - (-g)^n\} \quad n \geq 1 \quad (13)$$

Vi har konstaterat att F_n asymptotiskt förhåller sig som $G^n/\sqrt{5}$.

Av (13) följer utan problem att förhållandet $u_n = F_n/F_{n+1}$ går mot $1/G$, dvs mot g då n växer obegränsat; man behöver bara förkorta bråket F_n/F_{n+1} med G^n för att inse detta.

Låt oss se på en alternativ väg för att undersöka förhållandet F_n/F_{n+1} : genom att utnyttja den karakteriserande rekursionsformeln $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Vi låter a , b och $a+b$ vara tre successiva Fibonacci-tal, varvid de två första kan vara godtyckligt valda. Då är

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{och} \quad y = \frac{1}{1+x} \quad (14)$$

två förhållanden som följer på varandra, eftersom $\frac{b}{b+a} = \frac{1}{1+x}$.

Härav följer

$$y - g = \frac{1}{1+x} - g = \frac{1 - g - gx}{1+x}$$

Anta nu att $x < g$. Då gäller

$$y - g = \frac{1 - g - gx}{1+x} > \frac{1 - g - g^2}{1+x} = 0,$$

vilket innebär att $y > g$ om $x < g$.

Analogt, om $x > g$, så gäller

$$y - g = \frac{1 - g - gx}{1+x} < \frac{1 - g - g^2}{1+x} = 0,$$

dvs $y < g$ om $x > g$.

Dessa olikheter visar att successiva värden på u_n är ömsom mindre än g , ömsom större än g . Om exempelvis $u_1 = F_1/F_2 < g$, så är alla u_n med udda index mindre än g och alla med jämnt index större än g .

Vi ska nu dessutom se att u_n har g som gränsvärde.

Med vår kännedom om rötterna till ekvationen $x^2 + x = 1$ kan vi skriva polynomet $1 - x - x^2$ i produktformen $(g - x)(G + x)$,

Om z är det förhållande som följer på y , så gäller enligt (14)

$$z = \frac{1}{1 + y} \quad \text{eller} \quad z = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x}} = \frac{1 + x}{2 + x} \quad (15)$$

Av (14) och (15) erhåller man

$$z - x = \frac{1 - x - x^2}{2 + x} = \frac{(g - x)(G + x)}{2 + x}$$

Av detta uttryck framgår

$$\begin{array}{ll} z < x & \text{om } x > g \\ \text{medan} & z > x \quad \text{om } x < g \end{array}$$

Om $u_1 < g$, så bildar följderna av u_n med udda index således en strikt växande följd, medan u_n med jämna indices bildar en strikt avtagande följd. Båda delföljderna måste då konvergera, eftersom de är begränsade uppåt respektive nedåt (av g). Analogt, om $u_1 > g$, så ger udda indices en strikt avtagande följd och jämna indices en strikt växande följd, båda begränsade.

När vi nu vet att delföljderna har ett gränsvärde, så leder (15) och kontinuitet hos z som funktion av x till att dessa gränsvärden måste satisfiera ekvationen $x = z$, dvs

$$x = \frac{1 + x}{2 + x}$$

Vi får just den ekvation vars positiva rot är g , alltså är g gränsvärde för båda delföljderna och därmed för hela följderna $\{u_n\}$.

Fig 1

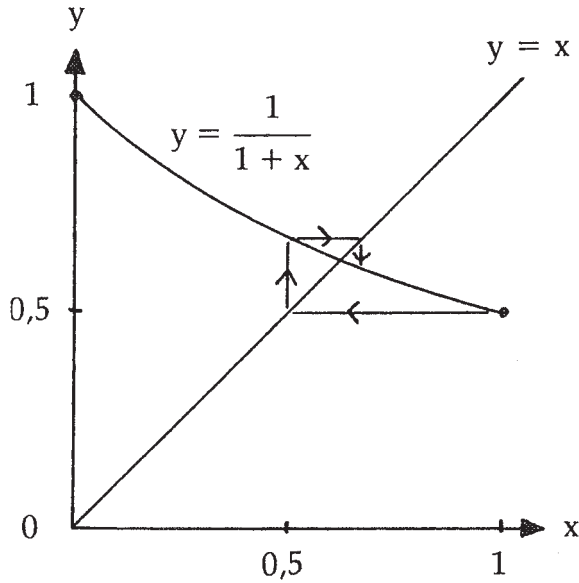


Fig 1 illustrerar pendlingen in mot gränsvärdet g . Linjen $y = x$ ombesörjer rekursionen: om $x = u_n$, så låter linjen värdet $y = u_{n+1}$ genom sambandet

$$y = \frac{1}{1+x}$$

bli nytt x -värde med hjälp av en linje parallell med x -axeln. En linje parallell med y -axeln ger oss grafiskt z som värdet u_{n+2} enligt (15), osv.

Vi får en spiral som konvergerar in mot den punkt $(g;g)$ där linjen $y = x$ skär kurvan

$$y = \frac{1}{1+x}.$$

Av detta alternativa bevis framgår alltså att bråken u_n har gränsvärdet g oberoende av F_1 och F_2 ; iterationsprocessen "kuvar" utgångsvärdena.

Talet g som kedjebråk

Om vi bildar den följd $\{u_n\}$ som tillhör urföljden 1, 1, 2, 3, 5, ... och tillämpar rekursionsformeln (14), så erhåller vi

$$u_1 = \frac{1}{1}, \quad u_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, \quad u_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} \quad \text{OSV.}$$

Vi ser att talet g kan skrivas som det oändliga kedjebråket

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

ett kedjebråk som endast innehåller ettor.

I den följd som de avslutade kedjebråken bildar återfinner vi förstås Fibonacci-förhållandena $1/1$, $1/2$, $2/3$, $3/5$, etc. Eftersom $G = 1+g$ har vi

$$G = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

En annan vacker framställning av G är

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$$

Om x_n är det tal som avslutas i och med den n :te gången $\sqrt{1}$ uppträder, har vi rekursionen $x_n^2 = x_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$). Här är $x_1 = 1 < 2$ och man kan lätt genomföra induktionen att om $x_n < 2$, så är även $x_{n+1} < 2$. Eftersom följderna $\{x_n\}$ är växande och uppåt begränsad, är den konvergent. Kontinuitet hos x^2 garanterar att gränsvärdet är den positiva roten G till ekvationen $x^2 = x + 1$.

Talet g är utan tvivel ett av de intressantaste irrationella talen, trots att det inte är transcendent – det är ju rot till en algebraisk ekvation. Som jämförelse till kedjebråksutvecklingen för g kan det vara intressant att se på några kedjebråk för de transcendenten talen e och π :

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

Efter den första fristående ettan följer alltså de jämna talen 2, 4, 6, 8, osv regelbundet med inskjutning av två ettor.

Ett annat kedjebråk är

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + \dots}}}}}}$$

Det upptäcktes av *Euler* 1737.

Vidare gäller

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

där de udda talens successiva kvadrater uppträder som täljare och talet 2 förblir konstant som additiv term efter en inledande etta i nämnaren. Formeln gavs av *Lord Brouncker* omkring 1650.

6

Fibonacci-tal i Pascals triangel

Det viktiga talschema som kallas Pascals triangel ska ha upptäckts i Kina redan före 1300-talet, men det kom att lanseras av Pascal i en avhandling år 1653. Schemat innehåller de binomialkoefficienter som uppträder vid utveckling av binomet $(a + b)^n$ och som

betecknas $\binom{n}{k}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

där $\binom{n}{0} = 1$.

Pascals triangel har följande utseende:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \dots & & & & & & & & & & \end{array}$$

I kanterna står idel ettor och i övrigt är varje tal summan av de två grannarna i raden ovanför. Om vi skjuter raderna åt höger så att vänsterkanten blir lodrät får schemat följande utseende:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
...					

Om vi nu adderar talen i de diagonaler som går åt höger i 45° stigning, så erhåller vi summorna 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... , dvs Fibonacci-tal. Är följderna $\{d_n\}$ av diagonalsummor identiska med Fibonaccis talföljd?

Vi låter diagonal nr 1 vara ettan i toppen; den har "summan" $d_1 = 1$.

Likaledes låter vi ettan närmast utgöra "summan" $d_2 = 1$ i diagonal nr 2.

Därefter följer $d_3 = 1+1 = 2$, $d_4 = 1+2 = 3$, $d_5 = 1+3+1 = 5$, osv.

Vi ser att diagonaler med udda nummer har 1 som sista term, i motsats till diagonaler med jämna nummer. För att besvara frågan är det därför lämpligt att låta $n = 2p$ och $n = 2p+1$ representera jämna respektive udda n (≥ 3).

För $n = 2p$ gäller

$$d_{2p} = \binom{2p-1}{0} + \binom{2p-2}{1} + \binom{2p-3}{2} + \dots + \binom{p}{p-1}$$

och $n = 2p+1$ ger

$$d_{2p+1} = \binom{2p}{0} + \binom{2p-1}{1} + \binom{2p-2}{2} + \dots + \binom{p+1}{p-1} + \binom{p}{p}$$

Som kontroll ser vi att sista termen i d_{2p} har värdet p och i d_{2p+1} värdet 1. Vi bildar nu summan $S = d_{2p} + d_{2p+1}$:

$$S = \binom{2p}{0} + \left\{ \binom{2p-1}{0} + \binom{2p-1}{1} \right\} + \dots + \left\{ \binom{p}{p-1} + \binom{p}{p} \right\}$$

Den för Pascals triangel konstituerande likheten

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

säkerställer att $S = d_{2p+2}$.

På analogt sätt bevisar man $d_{2p-1} + d_{2p} = d_{2p+1}$. Därmed är visat att diagonalsummorna successivt ger Fibonacci-följden 1, 1, 2, 3, 5, ...

7

Fibonacci-tal i geometrin

Pentagrammet

Binets formel för direktberäkning av Fibonacci-tal har visat oss ett samband mellan dessa tal, talet 5 och gyllene snittet g .

Talet 5 spelar också en direkt viktig roll bland de geometriska objekt som visualiserar Fibonacci-tal och/eller gyllene snittet.

I fig 2 är en regelbunden femhörning F bildad i ett reguljärt pentagram P . Inne i femhörningen är ett mindre pentagram P' inskrivet,

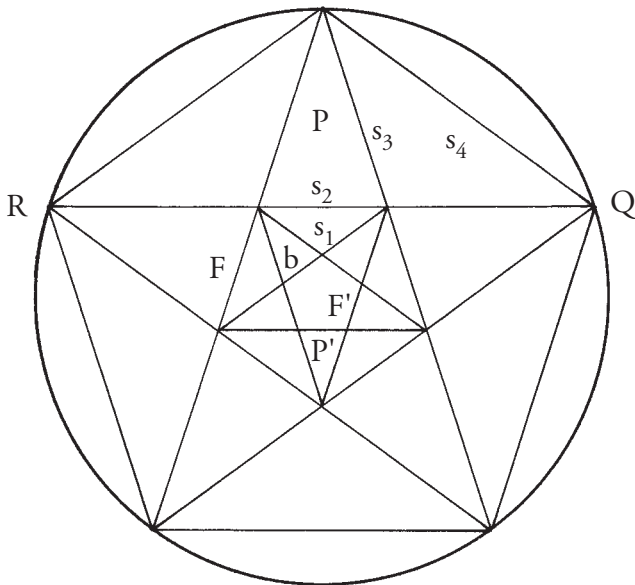


Fig 2

$$QR = s_5 = s_3 + s_4$$

vars sidor formar en regelbunden femhörning F' av mindre format än F . Dessa sidor bildar dessutom fem stjärnspetsar som utgör likbenta trianglar med toppvinkel 36° .

Om man nämligen omskriver P' med en cirkel, finner man att toppvinkeln är periferivinkel mot en femhörningssida, vars tillhörande cirkelbåge utgör en femtedel av cirkeln. Toppvinkeln är således hälften av 72° . Runt om P' ligger fem trubbvinkliga likbenta trianglar, vars toppvinklar är $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ och vars basvinklar är vardera 36° . Om vi utökar en trubbvinklig triangel med en stjärnspets erhåller vi ånyo en likbent triangel med 36° toppvinkel. Som bas har denna triangel sidan i pentagrammets stjärnspetsar.

Med kännedom om de allt större likbenta trianglar som fig 2 uppvisar och som utgör successiva deltriangler är det inte svårt att studera de sex sträckor som förekommer i figuren, från basen b i stjärnspetsarna hos P' till sidorna s_5 i det stora pentagrammet P . Man finner att längderna bildar sex successiva tal i en Fibonacci-följd b, s_1, s_2, s_3, s_4 och s_5 , eftersom

$$b + s_1 = s_2, \quad s_1 + s_2 = s_3, \quad s_2 + s_3 = s_4 \quad \text{och} \quad s_3 + s_4 = s_5$$

Följden fortsätter i det oändliga om man omskriver allt större figurer. Den rikliga förekomsten av likformighet i fig 2 leder till en ständigt upprepad proportion:

$$\frac{b}{s_1} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3} = \frac{s_3}{s_4} = \dots$$

För att ta reda på värdet av dessa förhållanden går vi till fig 3, som visar en triangel med samma form som stjärnspetsarna i fig 2. Den nedre deltriangeln är likformig med triangeln och de tre fett dragna sträckorna är lika långa; en av dem är basen. Om vi låter triangelnsidan ha enhetslängd och basen längd x , ger likformigheten hos triangeln och dess nedre deltriangel ekvationen

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

dvs den ekvation $x^2 + x = 1$ som vi erhöll i samband med Binets formel och vars positiva rot är $x = g$.

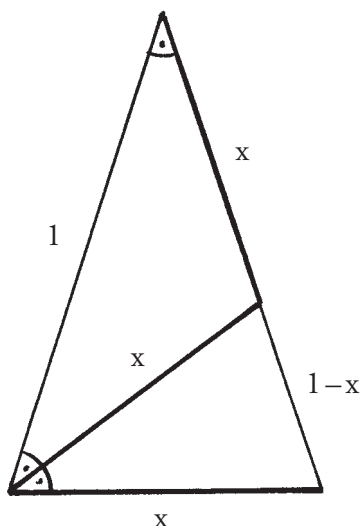


Fig 3

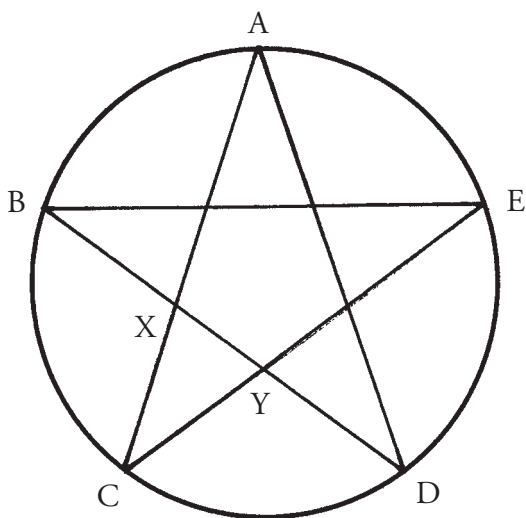


Fig 4

Alltså gäller $\frac{s_n}{s_{n+1}} = g$ och omvänt $\frac{s_{n+1}}{s_n} = G$

eftersom $G = 1/g$.

Härföljer $s_n = bG^n$ varvid $b = s_0$

I och för sig är det inte förvånande att de konsekutiva figurernas längder bildar en geometrisk följd. Skalan vid förstoring från en figur till närmast större figur av samma slag (men med motsatt orientering) är $G^2:1$.

I fig 4 återgår vi till det regelbundna pentagrammet och frågar: hur delar dess sidor varandra? Pentagramsidorna AC och CE skär sidan BD i punkterna X och Y. Därvid gäller (med beteckningar från fig 2)

$$XY = s_2, \quad BX = s_3, \quad BY = s_4, \quad \text{och} \quad BD = s_5.$$

Därföljer vi proportionerna

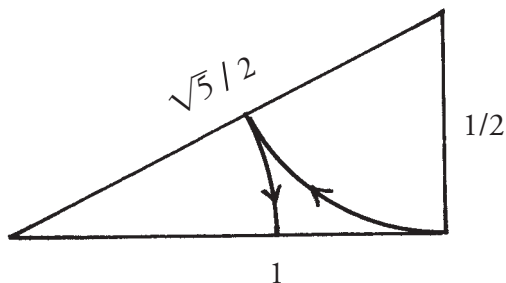
$$XY:BX = BX:BY = BY:BD = g$$

vilket innebär att pentagramsidorna alltigenom delar sig själva i gyllene snittets proportion.

Konstruktion av g samt inskrivning av 5- och 10-hörning i cirkel

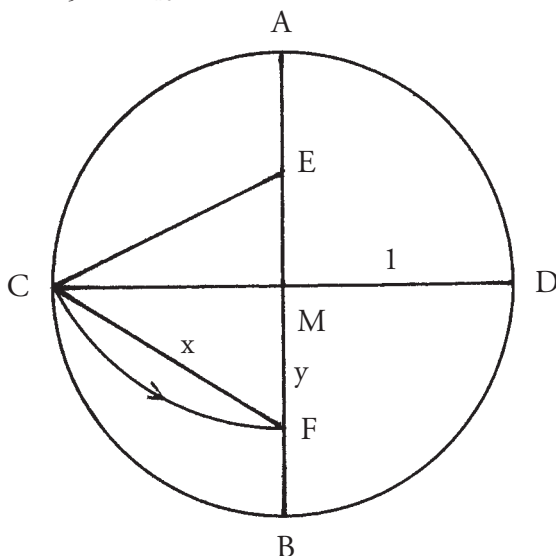
Fig 5 visar hur man med passaren lätt konstruerar talet g när sträckan 1 är given. Konstruktionens riktighet framgår av det uttryck för g som vi funnit.

Fig 5



I fig 6 går vi vidare till konstruktionen av de två regelbundna polygoner som är förknippade med g : 5-hörningen och 10-hörningen. I figuren är en cirkel med centrum M och radie 1 given. Två diametrar AB och CD läggs vinkelrätt mot varandra. På exempelvis radien MA konstrueras mittpunkten E . Med E som centrum och CE som radie slås en cirkelbåge; den skär radien MB i en punkt F . Då ger $x = CF$ och $y = MF$ måtten för sidan i den inskrivna 5- resp 10-hörningen, s_5 resp s_{10} .

Fig 6



Bevis: Vi börjar med y . Av $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}$ följer direkt $y = g$

i överensstämmelse med det exakta uttrycket för g . Eftersom basen i en likbent triangel med toppvinkel 36° och sida 1 är just g , är alltså MF den inskrivna 10-hörningens sida. Pythagoras sats på triangeln CMF ger $x^2 = 1 + g^2$ eller

$$x^2 = 2 - g \quad (1)$$

I fig 7 är MABC en fyrhörning bestående av två 10-hörnings-triangelar lagda med MB som gemensam sida och med $MA = MB = MC = 1$. Triangeln MAC har sidor 1 och en bas AC som just är s_5 eftersom toppvinkeln är 72° . Om P är mittpunkt på AB och höjden MP betecknas h , så kan vi ställa upp två ekvationer:

♦ Pythagoras sats på ΔAMP ger $h^2 = 1^2 - \frac{g^2}{4} \quad (2)$

♦ Arean av MABC $\frac{s_5 \cdot 1}{2} = gh \quad (3)$

Vänsterledet i (3) är arean beräknad som hälften av diagonalernas produkt, högerledet är arean som 2 ggr arean av triangel AMB.

(2) och (3) ger

$$s_5^2 = g^2(4 - g^2) = (1 - g)(3 + g) = 3 - 2g - (1 - g) = 2 - g$$

Enligt (1) är därmed visat att CF ger måttet för femhörningssidan.

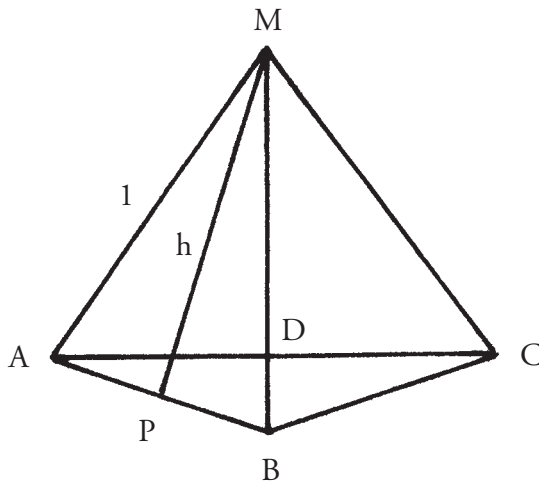


Fig 7

En "paradox"

En "paradox" som anknyter till formel (10) och som ofta presenterats i samband med gyllene snittet är följande kvadratombvandling:

En kvadrat med sida $21r$ delas upp med raka snitt enligt fig 8a. De fyra delarna fogas därefter samman till en rektangel enligt fig 8b. Denna har arean $13r \cdot 34r = 442r^2$, medan kvadratens area är $(21r)^2 = 441r^2$. Varifrån har rektangeln fått sitt tillskott om $1r^2$ i area?! För att "se" orsaken i bild krävs en mycket stor figur. Det går säkert snabbare att lösa paradoxen med en smula geometriskt tänkande.

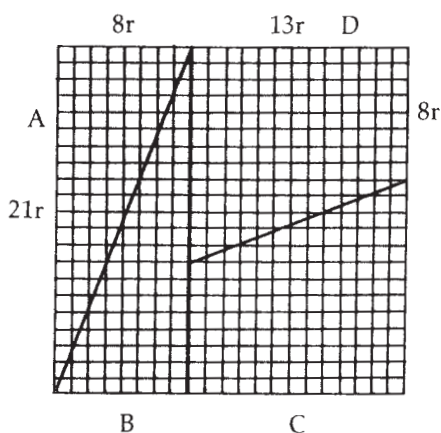


Fig 8a

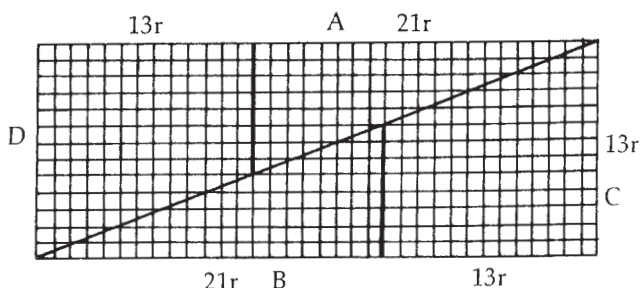


Fig 8b

Ikosaeder och dodekaeder

Den regelbundna ikosaedern är en av de fem sk platonska kropparna. Som det grekiska namnet anger bildas den av 20 ytor, närmare bestämt 20 liksidiga trianglar. De tolv hörnen kan indelas i tre grupper av två motställda par. Dessa par spänner upp tre kongruenta rektanglar som är ömsesidigt vinkelräta mot varandra. Vi ska undersöka proportionen bredd:längd hos de tre rektanglarna.

Vi låter $2l$ vara längden, $2b$ bredden, varvid $b < l$.

Om vi utgår från tre kongruenta, parvis vinkelrätt ställda rektanglar som skär igenom varandra symmetriskt, så får vi 12 hörnpunkter i en ikosaeder sammansatt av 20 trianglar. Om vi kan dimensionera rektanglarna så att trianglarna blir liksidiga har vi utöver den funna rektangelformen genomfört ett bevis för den regelbundna ikosaederns existens, eftersom symmetrin garanterar kongruens hos de 20 hörnen. I fig 9 är ABC en av de 20 trianglar som rektanglarna spänner upp. AD är normal mot kanten BC ; AE = l är normal mot det rektangelplan i figuren som BC tillhör. Med Pythagoras sats tillämpad på trianglarna ADE och ACD erhåller man

$$|AC|^2 = l^2 + (l - b)^2 + b^2$$

Kravet $|AC|^2 = |BC|^2 = (2b)^2$ leder efter insättning till $b : l = g : 1$, dvs till gyllene snittets proportion bredd:längd.

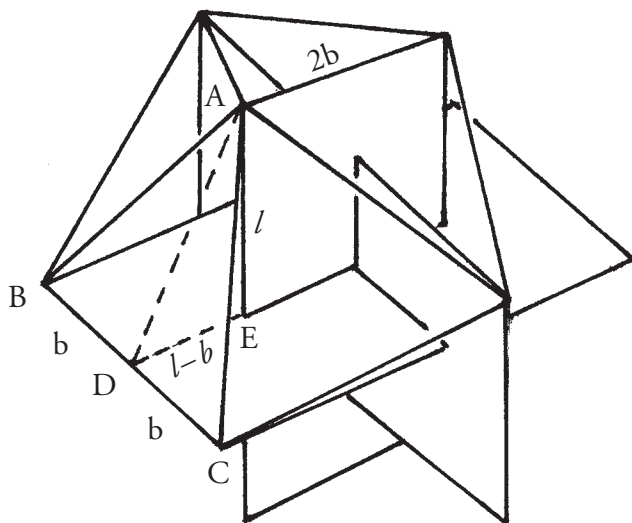


Fig 9

Det återstår nu endast att jämföra längden $|AC|$ med längden hos de övriga fyra kanter som utgår från A. En av dessa utgör rektangelbredden $2b$ och de övriga tre kanterna är av symmetriskäl lika långa som kanten BC. Därmed har vi visat att den reguljära ikosaedern existerar och att den spänns upp av tre "gyllene" rektanglar.

En annan platonsk kropp är den regelbundna dodekaedern, bildad av tolv regelbundna femhörningar. I dodekaedern kan man inskriva en regelbunden ikosaeder genom att förlägga dess hörn i femhörningarnas centrumpunkter.

Gyllene snittet spelar alltså en roll även i den regelbundna dodekaedern.

Framställningen i det mäktiga verket Elementa kulminerar med ett existensbevis för den regelbundna dodekaedern. Låt oss se hur grekerna genomförde beviset.

De utgick från en kub och ansatte på var och en av dess sex sidoytor en rektangel, ställd vinkelrätt mot ytan. Det gällde att beräkna dess bredd ($2x$) och höjd (h) så att 12 rektangelhörn tillsammans med kubens 8 hörn skulle bilda de 20 hörnen i en regelbunden (pentagon)dodekaeder. Om vi kallar rektanglarna för "fotbollsmål" med ribba ($2x$) och två stolpar (h) ser vi i fig 10 tre av kubens sidoytor och de mål som är resta. Målen är centralt placerade på sidoytorna. Det gäller att försöka avpassa deras mått x och h så att femhörningen ABCDE är plan och regelbunden. Om detta lyckas, så följer den regelbundna dodekaederns existens av symmetriskäl: fot-

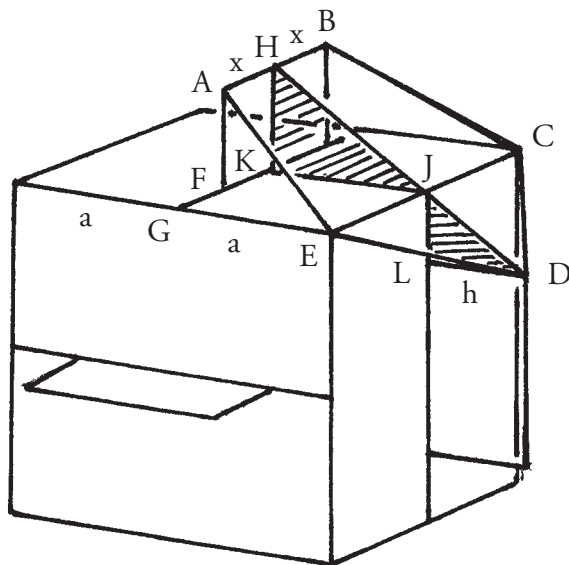


Fig 10

bollmålens ribbor bildar 6 av dess 30 kanter och stolparna reser även de övriga 24 kanterna. Symmetrin garanterar kongruens hos de tolv dodekaederhörnen.

I fig 10 är AB en ribba, AF och LD stolpar. G och J är mittpunkter på var sin kubkant.

Om punkterna H, J och D ligger i rät linje är femhörningen ABCDE plan. De streckade triangelarna HJK och DJL är då likformiga, vilket ger ekvationen

$$\frac{h}{a} = \frac{a-x}{h} \quad \text{dvs} \quad h^2 = a^2 - ax \quad (4)$$

Pythagoras sats på triangeln AEF ger

$$h^2 + [a^2 + (a-x)^2] = (2x)^2$$

som hyfsas till
$$h^2 = 2ax - 2a^2 + 3x^2 \quad (5)$$

(4) och (5) leder till
$$x = a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = ag$$

Proportionen ribba:kubkant = dodekaederkant:kubkant är alltså $g:1$.

Vidare är stolphöjden till följd av (4) lika med ag . Fotbollsmålen är således dubbelkvadrater med sidorna $2ag$ och ag .

Med hjälp av triangelarna CDJ, AFG och EFG samt Pythagoras sats visar man nu att femhörningen ABCDE är regelbunden.

Om man väl har bevisat existensen av den regelbundna ikosaedern, så påvisar man bekvämt existensen av den regelbundna dodekaedern genom att symmetriskt slipa ner ikosaederns tolv hörn tills endast mittpunkterna av dess tjugo ytor återstår.

8

Fibonacci-tal i naturen

Under de drygt 600 år som gick från Fibonaccis kaninproblem 1228 till en botanisk upptäckt av *A Braun* 1831 ägnades föga intresse åt Fibonacci-talen. Men för astronomen och matematikern *J Kepler* var de intressanta i samband med hans studier av intervallförhållandena i den diatoniska skalan. I denna ingår Fibonacci-talen 1, 2, 3, 5 och 8 i vissa intervall,

oktav 2:1, kvint 3:2, stor sext 5:3 och liten sext 8:5, men tonskalan uppvisar inte någon additiv motsvarighet till Fibonaccis rekursionsformel.

Braun studerade först de spiraler av fjäll som präglar kottar hos barrträd. Han fann att placeringen hos successiva fjäll innebar en vridning av $8/21$ varv kring kottens symmetriaxel. Han fortsatte med att studera bladställningen hos en rad växtfamiljer och enskilda växter och kunde påvisa en relativt allmän förekomst av s k *bladbråk*, exempelvis

1:2 hos gladiolus och tulpan
1:3 hos tidlösa och vissa gräs
2:5 hos den stora familjen Rosaceae (fig 11)
3:8 hos familjen Crucaceae (kålarterna)
5:13 hos maskros, kungsljus, potatis m fl växter
samt 8:21 hos barrträdens kottar

Här ser vi åter Fibonacci-talen dyka upp.

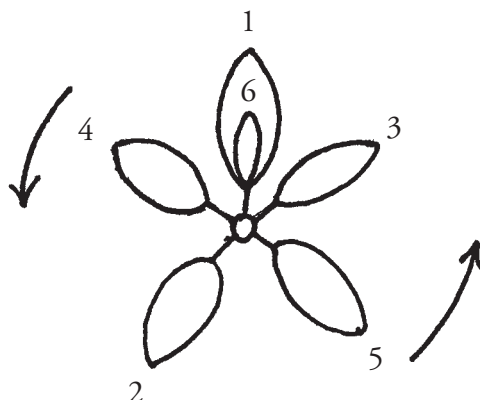


Fig 11
Schematisk
figur för
bladbråket 2/5

Brauns resultat utvidgades på ett överraskande sätt av den forskning som botanikern *G van Iterson* publicerade 1907. van Iterson följde bladen ända till deras uppkomst som bladanlag i vegetationskonen. Genom mikroskopiska undersökningar kunde han fastslå att bladbråket hos de yngsta bladanlagen motsvarar gyllene snittet, dvs en vridning av ca 137° kring den vertikala axeln. Från detta gyllene bladbråk avlägsnar sig växterna olika långt när bladen växer ut och åldras.

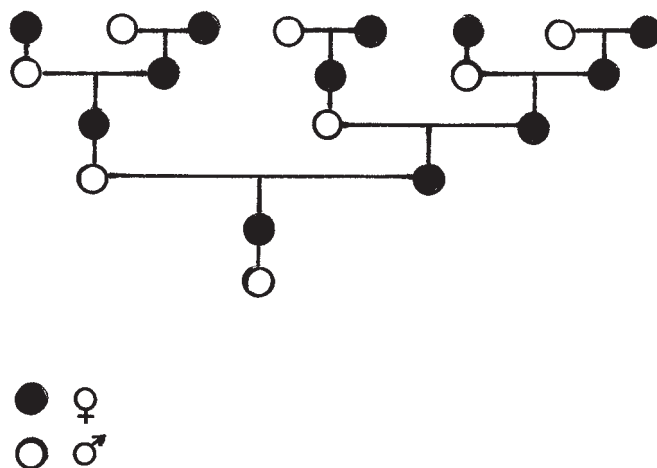
Ännu mer slående är de observationer som gjorts hos de spiralsystem som fröna i solroskorgar bildar. Hos varje solros finns två system, ett som innehåller medsolsspiraler, ett annat som har motsolsspiraler. Hos solrosor av normalstorlek är antalet spiraler i dessa system 55 och 34. Små solrosor har 34 respektive 21 spiraler. Större solrosor har 89 respektive 55.

Rekordet innehas av en gigantisk solros i Vermont, USA. Den uppvisade 233 respektive 144 spiraler. Dessa tal, 21, 34, 55, 89, 144 och 233, ingår som tal nr 8–13 i Fibonaccis urföljd. Tack vare en kombination av matematik och datamodeller har forskare kunnat påvisa att maximal packningsgrad i växtanlagen uppnås med Fibonacci-talen. Ett referat om detta ges av Ian Stewart i hans bok *Life's Other Secret* [16].

En hel del forskning på människokroppens proportioner, inledd av A Zeising 1851, visar med statistik att naveln delar människans kroppslängd i en proportion som håller sig kring gyllene snittet. Till skillnad från solroskorgens arkitektur är detta förhållande beträffande naveln inte så starkt underbyggt.

Med tanke på att naveln hos ett nyfött barn delar kroppslängden mitt itu, i förhållandet 1:1, tyder resultatet på att människan i motsats till växterna växer in i gyllene snittets proportion. I den mycket omtalade boken "da Vinci koden" ger författaren Dan Brown bl a en drönares stamtavla som exempel på förekomst av Fibonacci-tal. Drönare är hanbin som utvecklas ur obefruktade ägg, som alltså är faderlösa. Fig 12 visar en drönares stamtavla som sträcker sig några generationer tillbaka. Antalet bin är ett Fibonacci-tal i varje generation.

Fig 12
Stamtavla för
en drönare
(understa
cirkeln)



9

Delbarhet hos Fibonacci-talen

1, 1, 2, 3, 5, ...

I kap 4 ledde Binets formel bl a till likheten (11):

$$F_{n+k} = F_{n-1} F_k + F_n F_{k+1} \quad (n \geq 2, k \geq 1)$$

Vi återfår en i kap 4 noterad likhet som specialfall om vi sätter $k = n$:

$$F_{2n} = (F_{n+1} + F_{n-1})F_n \quad (1)$$

Den med (1) parallella varianten

$$F_{2n} = F_n L_n \quad (2)$$

härledd i kap 2, visar tydligt hur F_{2n} kan uppdelas i faktorer.

Med hjälp av (11) ovan kan vi emellertid härleda betydligt starkare resultat. Vi behöver då utnyttja begreppet största gemensam faktor till två heltal n och k ; vi betecknar detta tal $S(n,k)$.

Några exempel: $S(12,18) = 6$, $S(3,21) = 3$, $S(5,7) = 1$.

När $S(a,b)$ som i det tredje exemplet är 1, sägs a och b vara relativt prima.

Vi behöver repetera den algoritm med vilken man generellt bestämmer $S(n,k)$.

Euklides algoritm

Vi kan förutsätta $k < n$, båda positiva. I de divisioner som följer står bokstaven q för successiva kvoter och r för uppkommande rester. $r = 0$ innebär att en division går jämnt ut.

Efter en första division

av n med k har vi $n = kq_0 + r_1$ där $0 \leq r_1 < k$

Om resten är positiv
fortsätter vi med nya
divisioner:

$$\begin{aligned} k &= r_1 q_1 + r_2 & \text{där } 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 & \text{där } 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\dots & \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n & \text{där } 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_n q_n \end{aligned}$$

Att algoritmen måste sluta efter ett antal steg följer av att resterna bildar en strikt avtagande följd. Genom att följa tabellen nerifrån och uppåt inser vi att r_n är gemensam faktor till $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_2, r_1$ samt till k och n . Följer vi tabellen uppifrån och ner inser vi att varje faktor som är gemensam till k och n även ingår som faktor i r_n . Härav följer att *största* gemensamma faktorn till k och n är r_n , dvs

$$S(k, n) = r_n \quad (3)$$

Vi har nu tre satser rörande delbarhet hos Fibonacci-tal inom räckhåll, varvid bevisen delvis ska bygga på Euklides algoritm.

Sats 1 *Konsekutiva Fibonacci-tal är relativt prima*

Om $a < b$ är två konsekutiva F-tal med en gemensam faktor $d > 1$, så har även deras närmast föregående F-tal d som faktor.

Genom att upprepa differensargumentet till allt lägre F-tal kommer vi till slutsatsen att även det första F-talet, 1, har d som faktor. Denna orimlighet visar att $S(a, b) = 1$, dvs att a och b är relativt prima.

Genom att utnyttja några egenskaper hos största gemensamma faktorer och en hjälpsats ska vi nu bevisa följande märkliga sats:

Sats 2 *För två indices k och n gäller*

$$S(F_n, F_k) = F_{S(n,k)}$$

Fyra egenskaper

För den största gemensamma faktorn $S(a,b)$ till två naturliga tal a och b gäller

1° $S(a,bc)$, där c är ett heltal, är delbar med $S(a,b)$

2° $S(ac,bc) = cS(a,b)$

3° Om a och c är relativt prima, så gäller $S(a,bc) = S(a,b)$

4° Om b ingår som faktor i B , så gäller $S(a,b) = S(a+B,b)$

Bevis

1° följer direkt av att bc innehåller varje faktor som ingår i b

2° följer av att c blir multiplikativ faktor i Euklides-algoritmens samtliga rader.

Gäller 3°?

Per definition är $S(a,bc)$ en faktor i talet a .

Enligt 1° är $S(a,bc)$ dessutom faktor i $S(ab,bc)$ och av 2° följer

$$S(ab,bc) = S(a,c)b = 1 \cdot b = b$$

Alltså gäller att

$$S(a,bc) \text{ är faktor i såväl } a \text{ som } b$$

Euklides-algoritmen garanterar nu att

$$S(a,bc) \text{ är en faktor i } S(a,b) \quad (\#)$$

Å andra sidan ingår $S(a,b)$ enligt 1° som faktor i $S(a,bc)$ (&)

Av (#) och (&) följer nu

$$S(a,bc) = S(a,b), \text{ dvs } 3^\circ.$$

4° följer av att resten r_1 i Euklides algoritm för talen $a+B$ och b blir densamma som för talen a och b , när B är en multipel av b . Detta medför att även alla följande rester är oförändrade.

Vi behöver ytterligare en hjälpsats:

Hjälpsats F_k är en faktor i F_n om k är en faktor i talet n

Bevis

Anta först att k är en faktor i talet n , dvs $n = km$ för något tal m .
 $m = 1$ vållar inget problem eftersom fallet $F_k = F_n$ är trivialt. Vi gör nu induktionsantagandet att F_n är delbar med F_k för $m = p$, där $p > 1$.

För $m = p + 1$ gäller då $n = kp + k$ och enligt formel (11), kap 4, erhåller vi

$$F_{kp+k} = F_{kp-1} F_k + F_{kp} F_{k+1}$$

I högerledet är båda termerna delbara med F_k , den senare termen enligt induktionsantagandet. Alltså är F_n delbar med F_k även för $m = p+1$, varmed induktionsbeviset är genomfört.

Vi kan nu ta itu med sats 2.

Bevis av sats 2

Vi kan utan inskränkning anta $n > k$ och notera $n = kq_0 + r_1$ där $0 \leq r_1 < n$.

Med detta uttryck för n kan vi skriva

$$S(F_n, F_k) = S(F_{kq_0+r_1}, F_k)$$

$$\text{och enligt formel (11)} \quad = S(F_{kq_0} F_{r_1+1} + F_{kq_0-1} F_{r_1}, F_k)$$

Eftersom kq_0 är delbar med k , är F_{kq_0} enligt hjälpsatsen delbar med F_k . Av egenskap 4° hos största gemensamma faktorer följer nu

$$S(F_n, F_k) = S(F_{kq_0-1} F_{r_1}, F_k) \quad (4)$$

Vi ska nu omforma högerledet. Enligt sats 1 är F_{kq_0-1} och F_{kq_0} relativt prima. Eftersom F_{kq_0} enligt hjälpsatsen innehåller faktorn F_k , måste även F_{kq_0-1} och F_k vara relativt prima. Enligt egenskap 3° hos

största gemensamma faktorn kan vi nu förenkla högerledet i (4)

$$S(F_{kq_0-1}F_{r_1}, F_k) = S(F_{r_1}, F_k)$$

och vi har uppnått

$$S(F_n, F_k) = S(F_{r_1}, F_k) \quad (5)$$

Formel (5) växte fram ur första raden i Euklides algoritm,

$$n = kq_0 + r_1.$$

Genom att på samma sätt utgå från algoritmens andra rad,

$k = r_1q_1 + r_2$ och därefter från algoritmens efterföljande rader får vi en svit av analoga formler:

$$S(F_{r_1}, F_k) = S(F_{r_2}, F_{r_1})$$

$$S(F_{r_2}, F_{r_1}) = S(F_{r_3}, F_{r_2})$$

... ..

$$S(F_{r_{p-1}}, F_{r_{p-2}}) = S(F_{r_p}, F_{r_{p-1}})$$

varvid $r_{p-1} = r_pq_p$ är algoritmens slutrad.

Formel (5) och de efterföljande formlerna utvisar

$$S(F_n, F_k) = S(F_{r_p}, F_{r_{p-1}}) \quad (6)$$

Eftersom r_p är en faktor i r_{p-1} , är F_{r_p} enligt hjälpsatsen en faktor i $F_{r_{p-1}}$ vilket innebär att $S(F_{r_p}, F_{r_{p-1}}) = F_{r_p}$. Som sista puzzlebit i beviset av sats 2 behöver vi nu endast åberopa $r_p = S(n, k)$.

Med sats 2 som språngbräda kan vi nu utvidga hjälpsatsen till följande kraftfulla sats:

Sats 3 F_k är en faktor i F_n om och endast om k är en faktor i talet n

Bevis

I och med hjälpsatsen har vi bevisat sats 3 i ena riktningen. I motsatt riktning förutsätter vi att F_k är en faktor i F_n . Av detta följer direkt

$$S(F_k, F_n) = F_k \quad (7)$$

Å andra sidan gäller enligt sats 2

$$S(F_k, F_n) = F_{S(k,n)} \quad (8)$$

(7) och (8) utvisar $F_k = F_{S(k,n)}$, varav följer $k = S(k,n)$, vilket innebär att k är en faktor i talet n .

Därmed är sats 3 bevisad.

Som konsekvenser av sats 3 kan vi ställa upp en rad delbarhetskriterier för talen i Fibonacci-följden 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , t ex

- # Ett Fibonacci-tal är jämnt, om och endast om dess index är delbart med 3 (ty $F_3 = 2$)
- # Ett tal är delbart med 3, om och endast om dess index är delbart med 4 (ty $F_4 = 3$)
- # Ett tal är delbart med 5, om och endast om dess index är delbart med 5 (ty $F_5 = 5$)
- # Ett tal är delbart med 8 och således även med 4, om och endast om dess index är delbart med 6 (ty $F_6 = 8$)

IO

Andra förekomster av Fibonacci-tal

Gyllene snittet i konsten

Gyllene snittet, som ursprungligen kallades *sectio divina*, det gudomliga snittet, har under hundratals år varit en populär proportion i konsten. Såväl inom arkitektur som bildkonst kan man finna kända exempel på användning av gyllene snittet. Ett av höggotikens yppersta byggnadsverk, katedralen i Reims (påbörjad 1211 och fullbordad 1294), vittnar liksom andra gotiska katedraler om att arkitekten utgått från gyllene snittet (fig 13).

I *Giottos* berömda målning över Franciskus och fåglarna är motivets centrala punkt, Franciskus högra öga, placerat i gyllene-snitt-punkten på tavlans ena diagonal (fig 14).

Ulf Linde visar i en skrift om "*Geometrin i en målning av Piero della Francesca*" [12] hur Piero börjat med att anlägga en geometrisk ram där en cirkel och en regelbunden femhörning är bärande element. Som cirkelns medelpunkt har konstnären valt femhörningens översta hörn. Piero blev berömd som både matematiker och konstnär.

I en senare uppsats [13] tar Linde upp en målning av *Picasso*, *Flickorna från Avignon*, som exempel på hur konstnären utnyttjade gyllene snittet: "det är ganska lätt att blottlägga den geometri som



Fig 13
*Katedralen i
Reims*



Fig 14



Fig 15

målningen utgår från: en femhörning vars linjer och proportioner – gyllene snittets proportioner – dominerar hela duken”. Målningen betraktades som en revolution inom konsten och kom att inleda en ny inriktning, kubismen.

Ett av de äldsta exemplen på utnyttjande av gyllene snittet i arkitekturen är *Parthenon* (fig 15), det främsta av alla grekiska tempel, uppfört i dorisk stil på Akropolis under åren 448–432 f Kr, då Perikles regerade i Aten. Man kan inskriva dess fasad i en rektangel, vars sidor bildar gyllene snittets proportion.

Måtten på Stradivarius-fioler tyder på att mästaren kan ha valt att forma fiolen efter gyllene snittets proportion.

Den funktionalistiske arkitekten *Le Corbusier* skapade under åren omkring 1950 höghuset *Unité d'Habitation* i Marseille utgående

från proportioner som beräknats på en standardiserad människo-gestalt, *Modulor*, med längd 183 cm. Därvid kom gyllene snittet att spela en väsentlig roll.

I samband med en utställning i Louisiana (nära Köpenhamn) som-maren 2007 betonade den srilankesisk-engelske byggnadskonstruk-tören *Cecil Balmond* vikten av att förena konst med vetenskap och filosofi. I intervjuer yttrade han: ”*I botten på alla mina konstruktio-ner finns alltid en geometrisk formel med gyllene snittet som utgångs-punkt*” (DN 13.7.2007) och ”*Det harmoniska och välbalanserade formspråk som gyllene snittet representerar har alltid fascinerat världens arkitekter*” (P1 23.8.2007) – ännu ett omvittnande av att denna klassiska proportion alltjämt är aktuell.

Fibonacci-tal i tekniken

Två exempel får visa hur Fibonacci-talen kan dyka upp i tekniken.

Exempel 1

Fig 16 visar två planparallella plattor ab och bc. Ljus kan reflekteras i vilken som helst av ytorna a, b och c, dock endast nerifrån i yta a och endast uppifrån i yta c. Figuren visar två av de vägar som är möjliga för ljuset då antalet reflektioner är 4. Hur kan man beräkna antalet möjliga vägar $A(n)$ då n är antalet reflektioner ($n = 1, 2, 3, \dots$)?

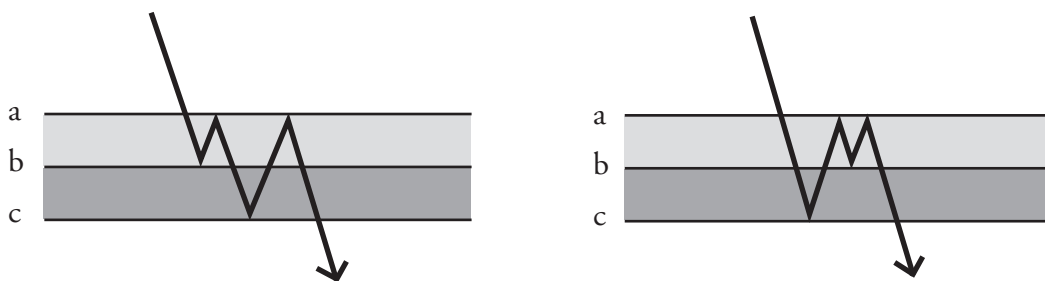


Fig 16

Exempel 2

Fig 17a–d visar successiv uppbyggnad av ett elektriskt nätverk av raka trådar, vardera med resistans $r \Omega$. Vi definierar resistansen mellan A och B i fig 17a som $R_0 = r$ och ersättningsresistansen för AB i fig 17b som R_1 .

För $n \geq 1$ låter vi R_n vara ersättningsresistansen för AB, då nätverket omfattar n st trianglar. Vad för formel erhåller man för R_n ?

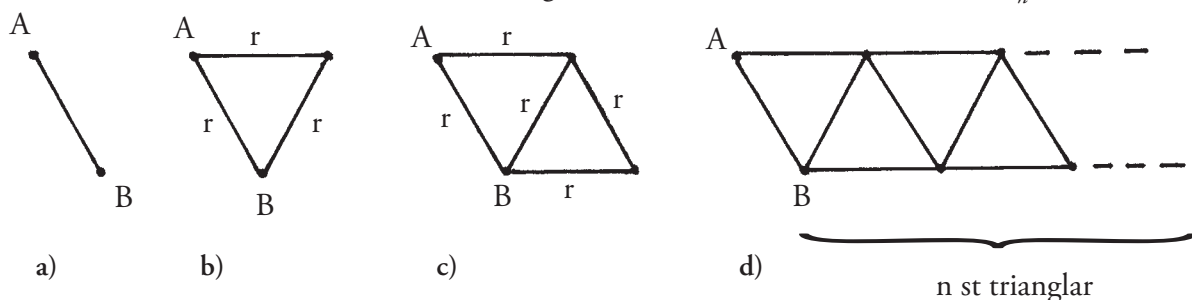


Fig 17

I behandlingen av *Exempel 1* finner man till att börja med $A(1) = 2$, $A(2) = 3$ och $A(3) = 5$. Det är inte svårt att härleda rekursionsformeln $A(n+1) = A(n) + A(n-1)$, $n \geq 2$. Härav följer att antalsfunktionen $A(n)$ bildar Fibonacci-följden 2, 3, 5, 8, ... för $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

För det elektriska nätverket i fig 17b gäller enligt en känd formel

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r}$$

varav
$$R_1 = \frac{2}{3}r$$

Nätet i fig 17c sammansätts av två resistanser om $r \Omega$ i V-form och en triangel till höger. Den senare har ersättningsresistansen R_1 och vi erhåller

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R_1 + r}$$

vilket ger

$$R_2 = \frac{r(R_1 + r)}{R_1 + 2r} = \frac{5}{8}r \quad (1)$$

På samma sätt inser vi rekursionen

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R_{n-1} + r}$$

och i analogi med (1) får vi

$$R_n = \frac{r(R_{n-1} + r)}{R_{n-1} + 2r} \quad (2)$$

Låt oss nu jämföra de funna resistenserna med Fibonacci-följden

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, \dots$$

Vi ser att

$$R_0 = \frac{F_0}{F_1} r, \quad R_1 = \frac{F_2}{F_3} r \quad \text{och} \quad R_2 = \frac{F_4}{F_5} r \quad (*)$$

Utgående från induktionsantagandet

$$R_p = \frac{F_{2p}}{F_{2p+1}} r \quad \text{där} \quad 0 \leq p \leq n-1$$

får vi enligt (2)

$$R_n = \frac{R_{n-1} + r}{R_{n-1} + 2r} r = \frac{F_{2n-2} + F_{2n-1}}{F_{2n-2} + 2F_{2n-1}} r = \frac{F_{2n}}{F_{2n} + F_{2n-1}} r$$

varav

$$R_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} r$$

Således gäller (*) för alla indices och vi har härlett formeln

$$R_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} r \quad \text{för } n \geq 0.$$

Om vi låter n gå mot oändligheten erhåller vi $\lim R_n = gr$

där g är gyllene-snitt-talet $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

Fibonacci-tal i några vetenskaper

T Koshy ger i sin bok [A1] ett stort antal exempel på användning av Fibonacci-tal, dels inom talteori och en rad andra områden av matematik, t ex kombinatorik och grafteori, dels beträffande elektriska kretsar och strukturformler i kemi (kolväten).

En intressant matematisk användning, påvisad av *Bellman och Dreyfus* i [2] och numeriskt illustrerad av *A Dunkels* i [4], saknas hos *Koshy*. Det handlar om *unimodala funktioner*, dvs funktioner som är monotont växande mot ett maximum och därpå monotont avtagande eller analogt vid minimum.

Fig 18 visar tre exempel.

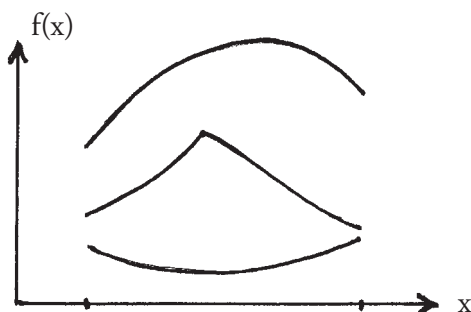


Fig 18

Tre exempel på
unimodal
funktion

Om det gäller att genom successiv approximation närma sig en maxi- eller minimipunkt (a ; $f(a)$) till en unimodal funktion $f(x)$, så är det enligt en av *Bellman & Dreyfus* bevisad algoritm fördelaktigast att utnyttja Fibonacci-tal vid valet av den följd x -värden som ska approximera värdet a .

En annan tillämpning inom matematiken: den franske matematikern *Gabriel Lamé* (1795–1870) utnyttjade några egenskaper hos Fibonaccis talföljd för att bevisa följande sats rörande Euklides algoritm (se kap 9):

Antalet divisioner som behövs för att finna största gemensamma faktorn till två heltal är aldrig större än 5 gånger antalet siffror i det lägre talet

F E A Lucas hade givit följdén 1, 1, 2, 3, 5, ... namnet *Lamés talföljd* men ändrade benämningen år 1876 till Fibonaccis talföljd.

II

Några talföljder som liknar Fibonacci-följderna

Pells talföljd

Ett viktigt exempel är den följd $\{P_n\}$ ("Pell numbers" efter *John Pell*, 1611–1685), som definieras av $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ ($n \geq 2$), $P_0 = 0$, $P_1 = 1$. Man erhåller Pell-talen

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots$$

På liknande sätt som i kap 2 kommer man till formeln

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n\}$$

Den asymptotiska formeln för stora n blir uppenbarligen

$$P_n \sim \frac{(1 + \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

En identitet för P -talen, som påminner om identiteten (10), kap 4, för Fibonacci-talen, är

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

Pell-talen kan bl a användas för approximation av $\sqrt{2}$: om x och y är naturliga tal som satisfierar Pells ekvation

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

så gäller $x/y \approx \sqrt{2}$, där nämnaren är ett Pell-tal.

Enligt Wikipedia (<en.wikipedia.org/wiki/Pell_number>) blev approximationen

$$\sqrt{2} \approx 577/408$$

känd inom grekisk matematik under 5:e årh. f.Kr. I detta bråk är 408 det 9:e Pell-talet.

Talföljder med flera termer i rekursionen

I en uppsats [14] behandlar *Anders Lönnberg* generaliseringar av typen

$$a_{n+N} = a_{n+N-1} + a_{n+N-2} + \dots + a_n \quad (1)$$

varvid de N första talen i följden är givna.

Utgående från metoden i kap 2 bildar man för $N=3$ ekvationen

$$k^3 = k^2 + k + 1$$

Den har en reell rot r_1 samt två konjugerat komplexa rötter r_2 och r_3 . De innehåller rätt otympliga rotuttryck. Den allmänna termen a_n bestäms med hjälp av de tre givna begynnelsevärdena (för indices 1,2,3) som en linjär kombination av de tre rötternas n :e-potenser.

Som gränsvärde för kvoten a_n/a_{n+1} då $n \rightarrow \infty$ erhåller man $1/r_1 \approx 0,54$.

I det generella fallet (1) har man att behandla ekvationen

$$z^N - (z^{N-1} + z^{N-2} + \dots + z + 1) = 0 \quad (2)$$

som kan skrivas

$$z^N - \frac{z^N - 1}{z - 1} = 0$$

Multiplikeras denna ekvation med sin nämnare erhåller man

$$z^{N+1} - 2z^N + 1 = 0 \quad (3)$$

Ekvation (3) har samma rötter som (2) samt roten $z=1$; utöver denna rot har (3) en enda reell rot r (strax under 2). Med hjälp av *Rouchés sats* [1] genomför Lönnberg en uppskattning av beloppen hos de komplexa rötterna till (2) och visar därpå att gränsvärdet för kvoten $L = a_n/a_{n+1}$ är $1/r$, då $n \rightarrow \infty$. Då N växer obegränsat avtar L monotont mot $1/2$.

En annan typ av generalisering

Vi börjar med den talföljd $\{a_n\}$ som definieras av $a_0 = 0$ och rekursionsformeln

$$a_n = 2a_{n-1} + 3 \cdot (-1)^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (4)$$

De första fem talen är 0, 3, 3, 9 och 15. Man kan gissa att följden är bestämd av $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ och den enhetliga rekursionsformeln

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (5)$$

Det är inte svårt att bekräfta (5) med ett induktionsbevis.

Låt oss nu undersöka om den enligt (5) angivna talföljden kan definieras som en linjär kombination av två potenser.

I analogi med den metod som i kap 2 ledde till formeln för Fibonacci-talen ansätter vi ekvationen

$$k^2 = k + 2$$

Dess rötter är $\alpha = 2$ och $\beta = -1$. Vi har därmed funnit två geometriska följder $\{2^n\}$ och $\{(-1)^n\}$ (som inte är proportionella mot varandra) sådana att de var för sig uppfyller rekursionen (5). Det gäller nu att finna två koefficienter p och q så att begynnelsevärdena $a_0 = 0$ och $a_1 = 3$ uppnås genom en linjär kombination $p \cdot 2^n + q \cdot (-1)^n$. Systemet (för $n=0$ och $n=1$)

$$\begin{aligned} p + q &= 0 \\ 2p - q &= 3 \end{aligned}$$

har lösningen $p = 1$, $q = -1$. Därmed är vi framme vid en enhetlig potensframställning av vår talföljd, nämligen

$$a_n = 2^n - (-1)^n$$

På samma sätt klarar man av det mer generella fall då

$$a_n = a_{n-1} + m a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

och två begynnelsevärden är givna. För $m > 0$ blir p och q reella tal.

I2

Övningsuppgifter

1. Vilket är det 10:e talet i den Fibonacci-följd vars tredje och åttonde tal är 9 respektive 102?
2. Enligt Andrejs Dunkels [5] löste man på Fibonaccis tid för oss enkla ekvationer av typ $ax+b = 0$ genom att först gissa ett par rötter.
Om g_1 och g_2 är två gissade rötter fortsatte man med att beräkna felet i vartdera fallet, dvs vänsterledets värde vid insättning av den gissade roten, säg f_1 resp f_2 .
Man bildade nu differensen $f_1 g_2 - f_2 g_1$ och dividerade denna med $f_1 - f_2$.
Bevisa att kvoten blev den sökta roten.
3. Vilka är de två första talen i en Fibonacci-följd om alla tal är positiva och det åttonde talet är 175?
(Finns det alternativa svar? Med x och y som de två första obekanta talen erhåller man en diofantisk ekvation, så uppkallad efter den grekiske matematikern *Diofantos*, verksam omkring 300 e Kr och berömd för sin kreativitet, bla i boken *Arithmetika*. Den som behöver fräscha upp sin kunskap om diofantiska ekvationer kan göra detta i exempelvis en bok av *Anders Vretblad* [19].)

4. "Fibonacci-puzzlet" på sid 36 bygger på likheten

$$21^2 = 13 \cdot 34 - 1.$$

Bevisa formeln

$$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n \text{ med induktion.}$$

5. För talen F_n i Fibonacci-följden 1, 1, 2, 3, 5, ... kan man observera att

$$F_3 = 2 = 1 + 1 = 1^2 + 1^2$$

$$F_4 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$$

$$F_5 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2$$

$$F_6 = 8 = 9 - 1 = 3^2 - 1^2$$

$$F_7 = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$$

$$F_8 = 21 = 25 - 4 = 5^2 - 2^2$$

$$F_9 = 34 = 25 + 9 = 5^2 + 3^2$$

Fortsätter denna regelbundenhet och hur ska den i så fall skrivas generellt?

6. Bevisa sambanden

$$a) \sum_{k=1}^{2n} F_k F_{k+1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

$$b) F_{2n+3} = F_{n+2} F_{n+3} - F_n F_{n+1}$$

$$c) 2F_{n+k} = F_k L_n + F_n L_k$$

7. En talföljd $\{a_n\}$ definieras av rekursionsformeln

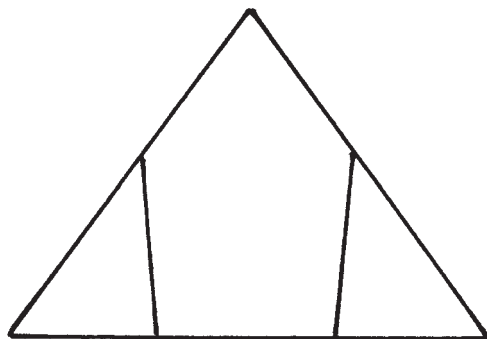
$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$ och begynnelsevärdena $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Bestäm den linjära kombination av två potenser som svarar mot denna talföljd.

8. Ur en cirkelrund homogen skiva skär man bort ett cirkelformat hål, vars periferi tangerar cirkelskivans rand. Återstoden av skivan har formen av en månskära, vars tyngdpunkt ligger på hålets periferi.

Hur stor radie har hålet om skivans radie är R ?

9. Ett geometriproblem från Fibonacci: Från en likbent triangel med sidor a , a och b skär man bort två trianglar, som är symmetriskt belägna med avseende på höjden mot triangelbasen (fig 19). Av triangeln kvarstår då en femhörning. Fibonacci fann att om femhörningen blir liksidig med sida x , så är x positiv rot till en andragradsekvation. Fibonacci beräknade x numeriskt för $a = 10$ och $b = 12$. Vilken är ekvationen och vad kan sägas om specialfallet $a = b$?

Fig 19
Likbent triangel
med bas:sida
= 12:10
(Fibonacci)



10. I en rektangel ABCD dras normalerna AE och CF från de diagonalt motsatta hörnen A och C till diagonalen BD. Vilken proportion råder mellan rektangelsidorna, då E och F delar diagonalen i tre lika långa delar?
(Svaret är här *inte* gyllene snittet utan en annan känd proportion.)
11. En triangel APQ inskrivs i en given rektangel ABCD så att P ligger på sidan BC och Q på sidan CD och så att hörntriangelarna ABP, CPQ och ADQ har samma area.
a) Var ska P och Q placeras?
b) Bestäm proportionen AB:BC i det specialfall då $AP = PQ$
12. I ett rätblock med volymen 1 kubikmeter är rymddiagonalerna 2 meter långa. En av kanterna har längden 1 meter.
a) Hur långa är de två övriga kanterna?
b) Vad kan sägas om den talföljd som kantlängderna bildar?

- 13.** En rätvinklig triangel ABC har sidorna $AB = 5$, $BC = 3$ och $AC = 4$ cm.
Med centrum M på kateten AC slås en cirkel som tangerar hypotenusan i D och kateten BC i C. Linjen BM skär cirkeln i Q och efter förlängning i en punkt P.
Beräkna proportionerna $PQ:PB$, $MC:BC$, $AD:BD$, $MC:AM$ och $AM:AC$.
- 14.** Fem cirklor med radie r är symmetriskt placerade så att de alla går genom en och samma punkt P. Två angränsande cirklor skär varandra dessutom i en annan punkt Q. Hur lång är sträckan PQ?

Svar till problem med udda nummer

- 1.** 267
- 3.** De två första talen är 4 och 11 eller 17 och 3
- 5.** Ja, $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$ och $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ för $n \geq 2$
Bevisas med induktion (något mödosam beträffande jämna indices)
- 7.**
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{13}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^n \right\}$$
- 9.** Ekvationen är $(2b - a)x^2 + (4a^2 - b^2)(2x - a) = 0$
Specialfallet $a = b$ ger en femhörning i form av en kvadrat med en på denna placerad liksidig triangel. Sidornas längd blir då $(\sqrt{12} - 3)a \approx 0,46a$.
För $a = 2b$ urartar femhörningen till den givna triangeln.

11. a) P och Q ska dela sidan BC resp sidan CD i gyllene snittets proportion, så att PC resp QC blir den längre delen

b) $AB:BC = g$

13. $PQ:PB = g:1$, $MC:BC = 1:2$, $AD:BD = 2:3$,
 $MC:AM = 3:5$, $AM:AC = 5:8$

Till sist Fibonaccis svar på tävlingsuppgiften (s 12):

Han angav det korrekta svaret $41/12$. Fibonacci löste alla uppgifterna [A1, s 3]. Av de övriga tävlande lyckades ingen lösa ens något av de tre problemen.

Referenser

A Utförliga verk

- [A1] T Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley & Sons 2001
- [A2] NN Vorobyov, *The Fibonacci Numbers*, Springer 2002

B Övriga referenser

- [1] T M Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley 1974
- [2] R E Bellman/SE Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press 1962
- [3] R Dixon, "The mathematical daisy", New Scientist 17.12.1981
- [4] A Dunkels, "Från kanin till max och min", Elementa 4/1976
Uppsatsen bygger på s. 152–155 ur [2].
- [5] A Dunkels, *Fibonacci*, Nämnaren 3, 1980/81
- [6] M Gardner, "Phi: The Golden Ratio" i The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions, Simon & Schuster 1961
- [7] M Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, Dover Publications 1977
- [8] P Glaister, "Fibonacci power series", The Mathematical Gazette, nr 486, vol. 79, 1995
- [9] H E Huntley, *The Divine Proportion*, Dover Publications, 1970
- [10] P Häggmark, "Fibonaccital", Nämnaren 2/1976, p. 11–25
- [11] Leonardo Pisano (Fibonacci), *Liber abaci*, Springer Verlag 2003
(upplagan från 1202, redigerad i engelsk översättning av L E Sigler)

- [12] U Linde, *Geometrin i en målning av Piero della Francesca*, Konstnärslaget, Stockholm 1974
- [13] U Linde, "Picassoutställningen 1980 i Museum of Modern Art", Artes 6/1980
- [14] A Lönnberg, "Generaliseringar av Fibonacciföljden", Elementa 1/1996
- [15] N J A Sloane, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press 1973
- [16] I Stewart, *Life's Other Secret*, Penguin Books 1999
- [17] B Ulin, *Att finna ett spår*, Utbildningsförlaget 1988 (utgången), i övers. *Finding the path*, The Association of Waldorf Schools of North America, 1991 eller (inbunden): *Der Lösung auf der Spur*, Freies Geistesleben, Stuttgart, 1987
- [18] B Ulin, *Matematisk design i naturen*, Telleby Bokförlag 2007
- [19] A Vretblad, *Algebra och kombinatorik*, Gleerups 1995

Sak- och personregister

- al-Khwarizmi 10
- Binet 13, 15, 43
- binomialkoefficient 28
- bladbråk 40
- Bonacci 10
- Braun 40
- Brouncker 27
- Corbusier, Le 52
- delbarhet Kap 9
- delbarhetskriterier Kap 9
- diagonalsumma 29
- Diofantos 11, 60
- dodekaeder 38
- Dunkels 56, 60
- elektrisk krets 54
- Elementa 38
- ersättningsresistans 54
- Euklides algoritm 44, 47
- Euler 26
- femhörning 34
- Fermat 11
- Fibonacci 8, 10, 62
- g och G Kap 5, 7–8
- Giotto 49
- Glaister 16
- gotisk katedral 50
- gyllene snittet Kap 5, 7–8
- harmonilära 21
- ikosaeder 36
- induktion 9, 46, 55, 59, 61
- Iterson, van 41
- kaninproblemet 11
- katedral (Reims) 50
- kedjebråk 25
- Kepler 12, 40
- Khwarizmi, al- 10
- Koshy 56
- kroppslängd 42
- kvadrattal 19, 20, 27, 61
- Lamé 56
- Le Corbusier 52
- Linde 49
- Lucas talföljd 9, 15
- Lönnberg 58
- navel 42
- paradox 36
- Parthenon 52
- Pascals triangel Kap 6
- Pell 57
- pentagram 31
- Picasso 49
- Piero della Francesca 49
- potenser 15, 58
- proportion 21, 42, 52
- pythagoreer 21
- pythagoreiska tal 19
- Pythagoras sats 35, 37
- reflexion 53
- resistans 54
- Rouchés sats 58
- Sloane 7
- solros 41

storleksordning 17, 57
Stewart 41
Stradivariusfiol 52
summer Kap 4 och 6

tiohörning 34
Vretblad 60
Zeising 42