Lära och undervisa matematik – *internationella perspektiv*

Redaktion
Jesper Boesen
Göran Emanuelsson
Anders Wallby
Karin Wallby

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Nationellt Centrum för Matematikutbildning

Redaktörer

Jesper Boesen är forskare i matematikdidaktik,
Göran Emanuelsson är redaktör och projektledare,
Anders Wallby är redaktör och webbansvarig,
Karin Wallby är redaktör för bl a Nämnaren,
samtliga vid NCM.

Box 160
405 30 Göteborg

Upplaga 1:5

ncm.gu.se

ISBN-10 91-85143-05-7
ISBN-13 978-91-85143-05-4

Layout: Anders Wallby
Omslagsmålning: Elias Wallby

Tryck: Ale Tryckteam AB, Bohus 2015

Förord

Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv är ett resultat av internationellt samarbete. Ett femtiotal lärarutbildare och forskare inbjöds sommaren 2003 till en konferens. Deras bidrag samlades i boken *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, se också omslaget, s 3. Introduktionen från boken på engelska publicerar vi i slutet av denna bok, tillsammans med abstracts för de 20 artiklar som inte översatts. De bidrag som översatts har vi bedömt som särskilt angelägna för svensk undervisning med tanke på Matematikdelegationens betänkande *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens* och utifrån erfarenheter av verksamheten vid NCM. Mer om betydelsen av det internationella samarbete som lett till publicering av de båda böckerna kan du läsa i den inledande artikeln *Inspiration för svensk matematikutbildning.*

Skolkulturen skiljer sig åt mellan länder. Vi har t ex olika grad av sammanhållen skola, synen på lärare och elev skiljer sig åt och eleverna börjar vid olika ålder. Artiklarna i denna bok bör läsas med det i åtanke. Hänvisningar till skolsystem, t ex årskurser, görs alltså till författarens miljö, inte till svensk skola om inte annat skrivs. Vi har försökt att översätta begrepp och uttryck till de vi vanligen använder, men det har inte alltid varit möjligt att finna bra motsvarigheter. Vår bedömning är dock att innebörder och intentioner framgår, vilket är det viktigaste.

Vi tackar alla författare som beredvilligt medverkat till och stöttat denna utgivning av de översatta artiklarna. Varmt tack också till alla medarbetare inom NCM som bidragit med granskning och synpunkter på de översatta artiklarna. Ett särskilt tack går till Calle Flognman, Bengt Johansson, Åsa Thyr Ryding, Ronnie Ryding, Malena Bång och Andreas Ryve för arbete med översättning och granskning av manus i samband med det redaktionella arbetet.

Tack också till Myndigheten för skolutveckling som gett ekonomiskt stöd för översättning och redaktionellt arbete.

Redaktionen

Innehåll

Inspiration för svensk matematikutbildning

JESPER BOESEN, GÖRAN EMANUELSSON, BENGT JOHANSSON, ANDERS WALLBY & KARIN WALLBY

En internationell konferens sommaren 2003 ledde till boken *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. Här beskrivs bakgrund till och syfte med konferensen och boken samt motiv för översättning av ett urval artiklar. Det ges också en kort översikt över innehållet i denna bok.

Idag råder stor enighet om det värdefulla i att alla lär sig matematik i skolan och vikten av att vi ägnar oss åt att dokumentera erfarenheter av att utveckla både elevers lärande och lärares undervisning. Synen på matematikundervisning har ändrats i de flesta länder. Från att ha sett på matematikinlärning som en kumulativ process att stegvis tillägna sig fakta och färdigheter har vi kommit att se lärande som en process att konstruera kunnande och att förklara, skapa och anpassa detta till komplexa system i vår omvärld. Synen på hur man lär sig matematik har ändrats, likaså hur vi ser på undervisning, kursplaner och utvärdering. Matematiklärande ses numera som ett samverkansprojekt, där elever utmanas att upptäcka, konstruera, verifiera och diskutera idéer och slutsatser. Det gäller att söka samband mellan olika begrepp, att lösa problem och konstruera meningsfulla helheter ur erfarenheter. Lärarrollen blir mer komplex och krävande när elever ska engageras som aktiva deltagare i att skapa och upptäcka matematik. Denna ändrade syn på lärande och lärarroll i matematik har utvecklat vårt sätt att se på läromedel och hjälpmedel, på uppföljning och utvärdering både i klassrumsarbete och på kursplanenivå, ja även på vilka som är de viktigaste målen för skolmatematiken.

Författarna till bokens artiklar har lämnat väsentliga bidrag till utvecklingen av svensk matematikundervisning de senaste 25 åren vid besök i Sverige eller genom samarbete med svenska lärare, lärarutbildare och matematikutvecklare. Bredden i innehållet visar hur varierande studier inom matematikdidaktik är. Den visar också på ett gemensamt intresse över hela världen för att samarbeta i syfte att utveckla matematiklärande för alla.

Forskning kring lärande, undervisning och utvärdering de senaste 30 åren har inte enbart ägt rum inom utbildningssektorn utan även inom psykologi, filosofi, antropologi och sociologi. Betydelsen av begreppsförståelse och problemlösning betonas – något som ju också matematikerna lyfter fram. På senare tid har forskning om aktiviteter i matematisk modellering visat hur dessa stödjer elevers uppbyggnad av viktiga begrepp.

Third International Mathematics and Science Study, TIMSS, visade på viktiga skillnader mellan innehåll, undervisning och utvärdering i olika länder. Matematik och matematikundervisning är uppenbarligen kulturberoende. Insikter i hur andra länders lärare resonerar hjälper oss att analysera våra egna traditioner och ”sanningar” och att utveckla svensk matematikundervisning. Det har vi kunnat se genom att vi de senaste 25 årens samarbetat med internationella matematikutvecklare, så att vi kunnat följa och ta vara på den växande förståelsen för möjligheter och problem i andra länder.

Omfattande förändringsarbete sedan 1970-talet

Efter ”den nya matematiken” på 1970-talet och nedslående resultat för svenska elever 1980 på Second International Mathematics Study, SIMS fick vi en intensiv diskussion bland svenska lärare och lärarutbildare kring vad våra kursplaner i matematik skulle innehålla, hur de skulle tas fram samt hur de kunde införas och utvärderas. Samhällsutvecklingen har lett till ökad betydelse för matematikutbildning och breddat engagemanget till nya grupper och utbildningslinjer. Resultaten på TIMSS, 1995, tog ett rejält kliv uppåt jämfört med 1980 men diskussionen fortsatte att engagera många och ledde till olika initiativ för att utveckla vår matematikutbildning. Stora förändringar gjordes i kursplaner, prov och bedömningssystem under 1990-talet. Dessa följdes dock inte upp nationellt eller lokalt med program för t ex kompetensutveckling eller forskning och utvecklingsarbete kring genomförande och uppföljning.

Många initiativ till förändringsarbete har kommit från enskilda lärare och från olika grupper, föreningar och organisationer, från tidskrifterna Nämnaren och Nordisk matematikkdidaktikk, NOMAD, från medverkande och deltagare vid matematikbiennaler och biennetter samt från nordiskt och internationellt samarbete i olika nätverk.

Nämnaren och biennalerna

Det första numret av Nämnaren kom 1974. Från första stund var syftet att stimulera till utbyte av undervisningsexempel och att ge exempel på forskningsanknytning med reflektion, idéer och diskussion kring matematiken i våra klassrum. Tidskriften vänder sig till lärare, lärarutbildare och forskare med innehåll från förskola till gymnasieskola och lärarutbildning. De flesta bidragen kommer från aktiva lärare, men det finns också många artiklar från lärarutbildare och forskare i matematik och matematikdidaktik. För att underlätta tolkning och realisering av kursplaner publiceras även bokserien Nämnaren*Tema*. Dessa böcker innehåller texter med lektionsidéer, studieuppgifter för lärare och sammanställningar över lämplig litteratur att använda i anslutning till undervisning inom olika ämnesområden. På detta vis finns olika ingångar för lärare att bearbeta och använda innehållet. Avsikten är att texterna ska ge underlag för att öka elevers intresse och lärande samt för egen kompetens i samspel med läro- och kursplaner.

Den första matematikbiennalen ägde rum i januari 1980. Syftet var att skapa ett forum där lärare i matematik kunde utbyta idéer och erfarenheter och att inspirera till intressant och givande matematikundervisning från förskola till högskola. Sedan starten har deltagare från alla skolformer och nivåer i skolsystemet sökt sig till de vartannat år genomförda konferenserna. Matematikbiennalerna erbjuder ett stort antal seminarier med föredrag och workshops, utställningar med läroböcker, läromedel och information samt idéutställningar kring lärares arbete och utvecklingsprojekt. Vid biennalerna har lärare, lärarutbildare och forskare i matematik och matematikdidaktik medverkat och de nordiska och internationella inslagen har varit många. Sedan 1998 har SMDF, Svensk förening för matematikdidaktisk forskning, genomfört en förkonferens för forskare och matematikutbildare från många länder. Mellan biennalerna organiseras också regionala endagarskonferenser, biennetter, med ungefär samma målsättning som biennalerna.

Sammantagna ger Nämnaren tillsammans med biennaler och biennetter ett rikt utbud av teori och praktik kring utveckling av svensk matematikutbildning. Kompetensutvecklingen har stimulerat och vidgat intresse och beredskap för utveckling av matematikutbildning i takt med utbyte av lärarerfarenheter, samhällsutveckling och forskningsresultat (Kilpatrick, 1991).

Internationella seminariet vid Göteborgs universitet

I mitten av 80-talet startade en internationell seminarieserie i matematikämnets didaktik vid Göteborgs universitet. Sedan det första seminariet med Thomas Carpenter om additions- och subtraktionskunnande, 1985, och en workshop med Frank Lester om problemlösning, har ett antal gästforskare medverkat. Innehållet var redan från början mångfasetterat, t ex matematikens historia, diagnostisk undervisning, matematikdidaktik som vetenskapsområde, undervisning i sannolikhetslära och NCTM:s Standards (Lingefjärd m fl, 1992). Sedan starten har fler än hundra forskare från drygt 20 länder gästat seminariet. Ekonomiskt stöd från International Fulbright Exchange Program har gjort det möjligt att bjuda in gästforskare att arbeta i Sverige längre perioder. Kolleger från våra grannländer har varit flitiga besökare vid Göteborgs universitet. Gästforskare har medverkat i konferenser och kurser för lärare, i biennaler och biennetter samt i forskningsseminarier runt om i Norden.

Flertalet besök, seminarier, föreläsningar och workshops har dokumenterats. Artiklar har publicerats i Nämnaren och den matematikdidaktiska forskningstidskriften NOMAD, som inledningsvis gavs ut från Göteborgs universitet. Det redaktionella arbetet med NOMAD ledde också till en ökning av de internationella kontakterna. Ytterligare möjligheter till diskussion om kompetensutveckling, forskarutbildning och forskning har vi fått i samband med besök i våra gästers forskningsmiljöer. Kontakter och nätverk har underlättat för lärar- och forskarstuderande och kolleger i Norden att göra besök i engagerande miljöer, på konferenser och skolor.

Det internationella seminariet har spelat en mycket viktig roll när det gällt att bredda och fördjupa våra möjligheter att inspireras, ta del av och diskutera forskning och utvecklingsarbete i matematikdidaktik från många olika länder och miljöer runt om i världen.

Behov av utveckling

Det finns mycket vi kan vara stolta över i engagemang och förändringsarbete i matematik och som vi ska se till att bevara och utveckla vidare, med respekt för traditioner och övergripande mål i skola och samhälle. Samtidigt visar erfarenheter samt de senaste årens studier och utredningar att lärande och undervisning i matematik behöver utvecklas, se t ex (SOU 2004:97; Thunberg m fl, 2006).

Forskning och erfarenheter visar att lärares kompetens är den mest betydelsefulla faktorn för elevers lärande. Vi vet att forskningsresultat och utvecklingsarbete kring lärande och undervisning i matematik inte har påverkat klassrumsarbetet så mycket som önskvärt. Det är också så att lärares beprövade erfarenhet och forskning i matematikdidaktik bör dokumenteras och diskuteras mera än nu.

Som resurscentrum med syfte att stödja utvecklingen av svensk matematikutbildning har NCM ett speciellt ansvar att minska gapet mellan forskning och skolpraktik. Därför strävar vi efter att följa och förmedla det som händer i våra grannländer och även utanför Norden. Vi diskuterar tankar och idéer med och inom de miljöer och nätverk vi har för att öka utbytet mellan verksamma lärare och forskare och för att öka intresset för matematik.

Internationell konferens om matematikutbildning

Utifrån beskrivna bakgrund och kända behov inbjöd vi kolleger i NCM:s internationella nätverk till en konferens 2003. Syftet var att ta del av, diskutera och dokumentera internationell forskning kring matematikutbildning med tydlig relevans för kursplaneutveckling och undervisning samt för lärares professionella utveckling. Syftet var också att ge tankeutbyte mellan internationella och svenska deltagare kring hur matematikundervisningen kan vidareutvecklas och förbättras. Vi inbjöd deltagarna att komma med skriftliga bidrag kring lärande och undervisning med direkt relevans för klassrumspraktik och som skulle behandla följande frågeställningar:

– Vad säger internationell forskning om lärande och undervisning i matematik?

– Hur får vi största möjliga intresse och möjligheter för studerande att lära matematik?

– Vilka resultat från internationell forskning är särskilt viktiga för klassrumspraktik?

Vi ställde också upp sex teman för bidragen: *Självförtroende och intresse att lära och använda matematik. Vad menas med att kunna matematik och vilken matematik är värd att kunna? Användning av representationer i olika syften och sammanhang. Övergångar mellan matematikområden och stadier eller skolformer. Hjälpmedel som stödjer matematiklärande. Lärande och undervisning i olika kontexter, etnicitet, språk, genderfrågor.* Dessa teman valdes utifrån NCM:s uppdrag och med tanke på direktiven till Matematikdelegationen. För en närmare beskrivning se Emanuelsson & Johansson (2004).

Konferensen innehöll presentationer med reaktioner från deltagarna. Bidragen diskuterades av de inbjudna forskarna, lärarutbildare och lärare från alla nivåer i det svenska utbildningssystemet. Författarna fick frågor med förslag på förtydliganden och förbättringar. Reviderade och redigerade bidrag gavs efter redaktionell bearbetning ut i boken *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* som presenterades vid 10:e Internationella kongressen för Matematikundervisning, ICME 10, i Köpenhamn, Danmark, i juli 2004 (Clarke m fl, 2004).

Lärande och undervisning i matematik – några internationella perspektiv

En redaktion inom NCM har nu valt ut ett antal artiklar för översättning för att göra en del av det omfattande materialet tillgängligt för en bredare publik. Bidragen representerar angelägna områden som är relativt lite uppmärksammade i svensk litteratur. Efter författarnas godkännande och uppdateringar har bidragen översatts, bearbetats och redigerats . Tanken är också att fler ska stimuleras att studera de artiklar som inte översatts. Därför återges introduktionen, där den engelska bokens innehåll beskrivs, i slutet av denna bok. Där kan du också se hur de översatta artiklarna fördelar sig på olika sektioner i originalboken och studera sammanfattningar för de ej översatta bidragen.

Lärande

De första fem artiklarna med författare från Australien, England, Tyskland och Tjeckien visar hur elevers förståelse av idéer och processer i matematik kan byggas upp. Sedan följer fyra bidrag från Danmark, USA, England och Tjeckien som tar upp problemlösning och modellering. Speciellt fokus finns i dessa inledande nio artiklar på hur forskningsresultat styrker visioner kring matematiklärande och hur dessa kan realiseras i klassrummet. Den därpå följande artikeln från Nederländerna visar hur specifika egenskaper hos problem kan leda till skillnader i flickors och pojkars resultat. Sedan presenteras tre artiklar från Ryssland och England som tar upp teoretiska aspekter på lärande i matematik. Olika perspektiv tas upp. Lärande kan enligt författarna ses som ett individuellt projekt eller företag. Det kan också uppfattas som ett samarbetsprojekt mellan elever, lärare och skolor eller ett kulturellt bestämt fenomen.

Undervisning

Tyngdpunkten i bokens sex avslutande bidrag från Australien, Norge och USA ligger på undervisning och kompetensutveckling. Det är mycket som påverkar elevers matematiklärande, men lärares syn på matematik och hur vi arbetar i och utanför klassrummet har störst inverkan på elevers förståelse för och självförtroende i matematik. Olyckligtvis tror många att det bara är ett fåtal som kan lyckas i matematik. Elever med otrygg uppväxt, med lärandesvårigheter och med annat modersmål än svenska får inte sällan för litet lärarstöd och möts av alltför låga förväntningar. Men vi är övertygade om att alla kan lära sig grundläggande matematik med relevant stöd och god undervisning.

Parallellt med att forskning om matematiklärande blivit mer omfattande har forskning kring undervisning också ökat. Den senare har pekat på vikten av starkare inriktning på lärares kunnande när det gäller t ex att organisera arbetet i klassrummet och att ge matematiska samtal större uppmärksamhet. Detta har lett till fokus på lärares förberedelser och kompetens, kommunikation mellan och med elever, hur problem presenteras och hur utvärdering genomförs. Kompetensutveckling är en pågående process- och samarbetsinriktad verksamhet.

Slutet på början ...

Sedan *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* presenterades vid ICME 10, har Matematikdelegationens betänkande lagts fram med en omfattande handlingsplan för kompetensutveckling och forskning, som gett ytterligare argument för nordiskt och internationellt samarbete (SOU2004:97). Regeringen har utlovat omfattande satsningar enligt denna handlingsplan.

Vi ser fram mot en fortsatt utveckling av undervisningen på alla nivåer. Med denna bok hoppas vi också öka intresset för att ta del av, diskutera och arbeta med internationellt uppmärksammade tankar och idéer om en förbättrad matematikundervisning.

Referenser

Clarke, B., Clarke, D., Lambdin, D., Lester, F., Emanuelsson, G., Johansson, B., Wallby, A. & Wallby, K. (Red). (2004). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. NCM, Göteborgs Universitet.

Emanuelsson, G. & Johansson, B. (2004). International perspectives. I B. Clarke m fl (Red), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. NCM, Göteborgs Universitet.

Kilpatrick, J. (1991). Scattering, storing, shaping: Journals in mathematics education. *Nämnaren 18*(3/4), 16 – 23.

Lingefjärd, T., Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Göteborg: Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

SOU2004:97. *Att lyfta matematiken. Intresse, lärande och kompetens*. Stockholm: Fritzes.

Thunberg, H., Filipsson, L. & Cronhjort, M. (2006). Gymnasiets mål och högskolans förväntningar. *Nämnaren 33*(2), 10 – 15.

Nya vägar i räkneundervisningen

ALISTAIR McINTOSH

> *It was interesting that in a small room full of people, we all had such varying ways of calculating simple sums. I do believe that this type of thinking is so much easier when dealing with calculations in everyday life.*
>
> *(Förälder, projektskola)*

> *If I were asked to identify a single most important change in both [my] belief and practice it would be the need to give students the freedom to solve mathematical problems in the most effective way for them.*
>
> *(Lärare, projektskola)*

Matematiken i ”primary school” har förändrats på många sätt under de senaste hundra åren. Kursplanen har utökats avsevärt för att ge plats åt rumsuppfattning, praktiska mätövningar med fler enheter, sannolikhetslära, hantering av data och grafisk representation, mönster samt introduktion till algebraiskt tänkande.

En mängd olika laborativa eller konkreta material har introducerats, från enkla material med många användningsområden (markörer, kuber, tärningar), till material som kanske lovade mer än de höll (till exempel Cuisenairestavar) och dyra, specialiserade och komplicerade paket med begränsad användning. Miniräknare har kommit in i en del skolor, ofta betraktade med stor misstro.

Att konstruktivistiska principer införts i klassrummet, långt innan ordet ”konstruktivism” myntades, så att barnen i någon mån har tillåtits undersöka, samla egna fakta, upptäcka och förklara sina upptäckter eller insikter, har inneburit en mycket stor förändring.

Denna text beskriver arbete genomfört i primary school i Australien. Primary school omfattar årskurserna 1 – 6 eller 1 – 7. Läsåret startar i januari och eleverna börjar skolan i januari det år de fyller 6. I översättningen har vi behållit dessa årskursbeteckningar, vilket innebär att eleverna går i andra klass det år de fyller 7.

Mitt i all denna förändring har ett område förblivit heligt: algoritmräkning. Små ingrepp har gjorts: beräkningarna har begränsats till tal med färre siffror och tiobas- och annat material har introducerats för att göra algoritmerna begripliga. Beräkningar av mer tveksam betydelse och med odiskutabel svårighet, som lång division, har skjutits upp ett år eller två. Men fram till helt nyligen har inte nödvändigheten att lära ut en specifik skriftlig algoritm för vart och ett av de fyra räknesätten ifrågasatts. Utom av några få.

I augusti 1830 höll Warren Colburn, som var den tidens bästsäljare av matematikläromedel i Amerika, en föreläsning för American Institute i Boston. En del av det han sa vid det tillfället var 150 år före sin tid.

> The learner should never be told directly how to perform any operation in arithmetic.
>
> It is not well for a child to commit anything to memory that he does not understand.
>
> If ... teachers would have patience to listen to their scholars and examine their operations, they would frequently discover very good ways that had not occurred to them before.
>
> Nothing gives scholars so much confidence in their own powers and stimulates them so much to use their own efforts as to allow them to pursue their own methods and encourage them in them.
>
> It is very important for teachers to lead their scholars into the habit of attending to the process going on in their [i e the students'] minds while solving questions, and of explaining how they solve them.
>
> (Colburn, 1970)

Under de senaste tjugo åren har fördämningen börjat brista. Den algoritmiske kejsaren tycks bära allt färre kläder.

Huvudräkning kontra uppställning

De traditionella skälen till att lära ut formella skriftliga algoritmer har angripits. I många länder finns det nu starkt stöd för uppfattningen att utveckling av taluppfattning genom undervisning i huvudräkning bör ersätta undervisning i räkning i uppställning som skolans huvudsakliga uppgift inom aritmetiken. Beteckningen huvudräkning används i denna artikel för beräkningar som genomförs helt och hållet "i huvudet". Svar, eller förklaringar av tankar, kan senare bokföras på papper, som till exempel i figur 1. Exempel på argument för detta har sammanställts i andra sammanhang t ex (McIntosh, 1994). Bland dessa finns:

- Uppställningar används inte särskilt ofta av vuxna (Northcote & McIntosh, 1999; Wandt & Brown, 1957).
- Barn undviker ofta uppställningar till förmån för egna metoder (Plunkett, 1979).

- Räkning i uppställning tycks ge fler felaktiga svar än informella metoder gör (Carraher, Carraher & Schliemann, 1987; Kamii & Dominick, 1997).
- Räkning i uppställning behövs inte så ofta i miniräknarens tidsålder (Levin, 1981).
- Räkning i uppställning utvecklar inte barnens taluppfattning (Jones, 1988).
- Skolans betoning av algoritmräkning ger barnen felaktiga uppfattningar om beräkning (Hope, 1987).

Huvudräkning, å andra sidan, förtjänar mycket större uppmärksamhet i skolan eftersom huvudräkning

- är den viktigaste beräkningsformen för de flesta (Northcote & McIntosh, 1999; Wandt & Brown, 1957),
- behövs för att göra uppskattningar,
- behövs för att kontrollera resultatet på miniräknaren (Cockcroft, 1982),
- är det enklaste sättet att utföra många beräkningar (Hope, 1987),
- utvecklar barnens taluppfattning (Ewbank, 1977),
- är ett kreativt, problemlösande och konstruktivistiskt sätt att förhålla sig till tal.

(McIntosh, 1994)

Huvudräkning är inte ”snabbt och rätt”-test

Argumentet för att sätta huvudräkning i stället för algoritmräkning i centrum i de tidiga skolårens räkneundervisning innebär inte en rekommendation av ännu tyngre diet av traditionella test på ”snabbt och rätt”, vilket tidigare ofta har varit det vanligaste sättet att behandla huvudräkning.

Redan 1967 undersökte Biggs aritmetikundervisningen i ett brett urval av engelska skolor. Han noterade att i 69 studerade skolor varierade antalet minuter per dag som ägnades åt huvudräkning från noll till elva. Det som karaktäriserades som ett traditionellt tillvägagångssätt utmärktes av ”mycket huvudräkning där snabba svar uppmuntras” (Biggs, 1967). Bland slutsatserna från hans studie märks:

- Ängslan för tal tenderar att öka något ju mer tid som ägnas åt huvudräkning.
- Den tid som avsattes för huvudräkning stod inte i någon relation till uppnådda färdigheter.

Det är uppenbart att det traditionella förhållningssättet till huvudräkning med test på ”snabbt och rätt” inte förbättrar barnens prestationer, utan ger fler ängsliga barn.

Två projekt i Australien

Det förhållningssätt till huvudräkning som beskrivs i återstoden av denna artikel baserar sig på två projekt som jag nyligen har ansvarat för i samverkan med skolmyndigheter i Tasmanien och Australian Capital Territory (ACT). Det första, *Improving and Assessing the Mental Computation of School Age Students* är ett treårigt projekt (2001 – 2003) som finansieras av DEST (Federal Department of Education, Science and Training), skolmyndigheterna i Tasmanien och ACT samt Catholic Education Office i Tasmanien. En stor del av detta projekt har bestått i att i sex olika skolor utveckla och utpröva en sekvens av huvudräkningsmaterial. Materialet täcker årskurserna 3 till 10 och omfattar heltal, bråk, decimaler och procent.

Det andra, *Developing Computation*, ett tvåårigt projekt (2001 – 2002), finansierades av skolmyndigheten i Tasmanien, the Catholic Education Office i Tasmanien och AIST (Association of Independent Schools) i Tasmanien inom ramen för det federala programmet Strategic Numeracy Research and Development Project. Dess målsättning har varit att i årskurserna 2, 3, och 4 vid nio skolor, studera hur man kan gå från huvudräkning till informell skriftlig beräkning, utan att undervisa om standradalgoritmer för addition och subtraktion. Målet har också varit att kartlägga effekterna på elever och lärare med råd till lärare på andra skolor, baserade på resultat av denna erfarenhet.

I båda projekten baserades utvecklingen av huvudräkning på begreppslig förståelse och utveckling av strategier för huvudräkning. Det senare utgick från två olika erfarenheter: dels att uppmuntra barnen att utforska, att muntligt beskriva och jämföra sina egna strategier för att utföra huvudräkning, dels att låta barnen ta del av en hel rad effektiva strategier för huvudräkning med hjälp av noga genomtänkta undervisningssekvenser. Aktivitet A representerar det centrala i detta angreppssätt. Den innehåller ett flertal nyckelfaktorer och

- värdesätter olika strategier,
- uppmanar eleverna att undersöka och förklara sitt tänkande,
- värdesätter elevernas egna tankar och metoder,
- visar att det ofta finns flera bra men olika sätt att nå en lösning,
- uppmuntrar kritisk diskussion om olika metoder,
- ger eleverna tillfälle att upprepa och bedöma andras strategier,
- placerar elevernas tänkande, snarare än lärarens auktoritet, i inlärningens centrum.

Aktivitet A

Hur gjorde du?

Eleverna får 10 – 15 sekunder på sig att utföra en beräkning i huvudet. Sedan får de muntligt beskriva sin räknestrategi.

Åldersgrupper

Årskurs 1 – 10

Material

Skrivtavla för bokföring av elevernas strategier

Aktiviteten

Ge eleverna en huvudräkningsuppgift, men skriv inte upp den på tavlan. Förklara att de kommer att få gott om tid att göra beräkningen, och att du bara kommer att vara intresserad av hur de gör. Låt dem tänka 10 – 15 sekunder och be sen om svar. Låt sedan enskilda elever förklara hur de räknat. Anteckna deras strategier på tavlan (till exempel 37 + 46: 30 + 40 = 70, 7 + 6 = 13, 70 + 13 = 83). Fråga efter varje förklaring: *Gjorde någon annan på det här sättet*? Vem gjorde på något annat sätt? Tavlan här nedan visar flera sätt att utföra beräkningen 37 + 89.

När eleverna börjar bli vana vid att förklara sina strategier och att lyssna på förklaringar, uppmuntra då till diskussion om vad de uppfattar som olika lösningsstrategiers styrkor och svagheter.

37 + 89

30 + 80 = 110
7 + 9 = 16
110 + 16 = 126

89 + 1 = 90
90 + 10 = 100
100 + 26 = 126

37 + 3 = 40
40 + 6 = 46
46 + 80 = 126

89, 99, 109, 119, 119 + 7 = 126

89 + 11 = 100
100 + 26 = 126

90 + 36 = 126

Jag sa 7 och 9 är 16, skrev ner 6, ett i minne, 1 och 3 och 8 är 12, det blir 126.

Jag började 37, 38, 39 ... Jag tappade räkningen.

Begreppsförståelse

När barn räknar i huvudet använder de sin begreppsförståelse av talen och de aktuella operationerna, till skillnad mot när de använder formella skriftliga algoritmer, vilka baseras på att man kommer ihåg reglerna. När de gör fel, speciellt när det gäller bråk, decimaltal och procent, är felen nästan uteslutande beroende på begreppsliga missförstånd och inte på bristande färdighet i att hantera tal (McIntosh, 2002a). Barn förändrar också sin strategi beroende på vilka tal som ingår och utnyttjar då kopplingar mellan de specifika talen och annan kunskap. Be till exempel barn, eller vuxna, att först beräkna 25 + 89 och sedan 25 + 27. De flesta kommer att använda olika strategier för de två beräkningarna. I den första kommer de troligen att antingen addera tiotalen och entalen för sig, eller börja med 89, runda av till 90 eller 100 och sedan addera resten av 25. I den andra beräkningen kommer många att utgå från 25 + 25. Således betonar vi i varje skede begreppslig förståelse och kopplingar.

En aktivitet som visat sig mycket effektiv för att sätta fokus på barnens begreppsliga förståelse är Tanketavlan som utgör basen för Aktivitet B. God förståelse av ett matematiskt moment eller område visar sig genom förmågan att överföra idén mellan olika representationer: bild, verbal, symbolisk och konkret/fysisk. Svagheter i förståelsen avslöjas ofta i brister i representationerna. Den individuella aktiviteten ger också barnet tillfälle att, i beräkningsdelen, beskriva sin lösningsstrategi för en huvudräkningsuppgift.

Aktivitet B

Tanketavlan

Barnen sitter antingen i smågrupper med en stor Tanketavla eller individuellt med en A4-version och tolkar en given matematisk idé i ord, symboler, bilder eller diagram eller med föremål. Arbete i smågrupper utgör den bättre inlärningssituationen medan individuellt arbete är mer lämpat för bedömning.

Åldersgrupper

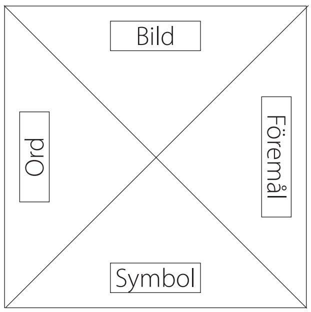
K – 12

Material

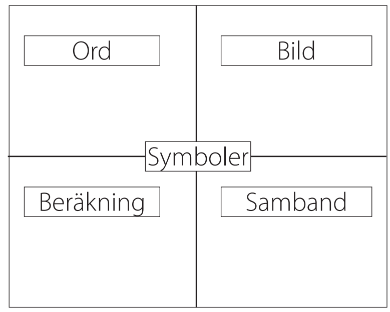
För grupparbete: En Tanketavla till varje grupp om 3 – 4 barn, papper, passande material, t ex markörer, småsaker, kuber, pengar, tiobasmaterial
För individuellt arbete: En Tanketavla i A4-format

→

Tanketavla för gruppaktivitet



Tanketavla för individuell aktivitet



Gruppaktivitet

Ge varje grupp en Tanketavla (ca 60–80 cm i kvadrat, av laminerad kartong), ett anteckningsblock (A5 eller A6 är lagom) och några konkreta föremål. Placera en för gruppen passande startpunkt i ett av de fyra fälten. Skriv till exempel ”5” eller ”27 + 44” eller ”7,6” eller ”15 × 9” på en papperslapp och lägg den i *Symbolfältet*. Gruppens uppgift är sedan att placera relevanta tolkningar av detta i vart och ett av de tre andra fälten på tavlan: en berättelse i *Ordfältet*, en teckning eller ett diagram i *Bildfältet* och några verkliga föremål i *Föremålsfältet*.

Individuell aktivitet

Ge varje barn en Tanketavla i A4-format, med en passande beräkning i *Symbolfältet*. Barnet kompletterar sedan de återstående områdena på Tanketavlan. *Sambandsfältet* är en öppen inbjudan till barnen att visa kopplingar som kan göras mellan den givna beräkningen och t ex teckningar och andra beräkningar.

Att utveckla huvudräkning

Figur 1 visar utveckling av addition och subtraktion från de tidigaste idéerna via kompetens i huvudräkning till informella och formella skriftliga metoder. Den visar strukturen för de skolor som arbetar i projektet.

Vad är ett tal? Talens namn. Uppräkning.
Addition och subtraktion (ental) i huvudet genom uppräkning.
Gruppering.
Addition och subtraktion (ental) i huvudet med hjälp av härledda metoder.
Grundläggande tabellkunskap i addition och subtraktion.
Positionssystem och notation (två- och tre siffriga tal).
Utvidgad addition och subtraktion i huvudet (två tvåsiffriga tal).
Skriftlig förklaring av huvudräkningsmetoder. Förfinas och befästs.
Utvidgning av skriftlig metod. Säker skriftlig metod befästs.
Individuella beslut angående undervisning om standardalgoritmer.

För att stärka grundkunskaperna introduceras specifika strategier (dubblor och nästan dubblor, tiokamrater, tiotalsövergång), genom aktiviteter med föremål, vilket i sin tur leder till mentala bilder. Man behöver behärska dessa till en viss grad och förstå positionssystemet, innan man kan använda dem för att göra beräkningar med tvåsiffriga tal. En motsvarande utveckling används för grundläggande tabellkunskap i multiplikation. Dessa associeras med speciella strategier för beräkning, så att relationerna mellan dem betonas snarare än utantillinlärning. När memorering uppmuntras ska denna hellre ske genom skutträkning (3, 6, 9, 12, ...) än genom att man rabblar tabellerna. Det övergripande målet är att barnen ska känna sig säkra på addition och subtraktion av tvåsiffriga tal i huvudet samt på multiplikation och division med ett ensiffrigt och ett tvåsiffrigt tal. Mer omfattande mental gymnastik presenteras inte i detta skede.

Aktivitet C modellerar med hjälp av föremål en av de två vanliga huvudräkningsstrategierna vid addition och subtraktion av tvåsiffriga tal: börja med det ena talet och addera eller subtrahera stegvis delar av det andra talet. Denna aktivitet visar att tvåsiffriga tal kan adderas eller subtraheras genom att man först adderar eller subtraherar det andra talets tiotal och därefter dess ental.

Skälet till att introducera den dynamiska aktiviteten är att många elever lär sig genom en process där arbete med föremål leder till dynamiska mentala bilder. Dessa leder i sin tur till mentala handlingar med symboler.

Aktivitet C

Räkna mellan 0 och 99

Eleverna finner, adderar och subtraherar tal genom att använda ett 0 – 99-kort. Handlingar och bilder modellerar ett vanligt sätt att addera och subtrahera tvåsiffriga tal i huvudet.

Åldersgrupper

Årskurs 3 – 8

Material

Ett 0 – 99-kort till varje elev, ca 15 × 15 cm. (Ett kvadratiskt kort numrerat från 0 till 99 i stället för det vanligare, med numrering 1 – 100. Sådana kan användas, men i så fall måste det första steget i aktiviteten modifieras).

→

Aktiviteten

Att hitta ett tal

- Eleverna placerar ett finger på 0 på 0 – 99-kortet. Läraren visar hur man flyttar till ett tal genom att först räkna tiotalen nedåt och därefter flytta åt höger och räkna entalen. För att till exempel nå 23, flytta 10, 20, 21, 22, 23.
- Eleverna övar nu på att flytta sig från noll till andra tal och de följer exakt denna rutin. Eleverna ska säga talen högt efterhand som de flyttar sig: 10, 20, 21, 22, 23.
- Eleverna placerar nu fingret på noll och försöker nå ett givet tal med slutna ögon.

Addition

- Placera fingret på 45. Hur kan du flytta fram (addera) 23?
  Jo, ner, ner, höger, höger, höger. Vad är 45 + 23? Vilka tal flyttade du över? (Hur adderade du 23?): 55, 65, 66, 67, 68.
- Eleverna övar andra additioner på kortet (utan tiotalsövergång).
- Placera fingret på 37. Hur kan du flytta fram (addera) 29?
  Diskutera elevernas metoder. En del elever kommer att gå ner 20 och sedan räkna fram 9, och utan omsvep hoppa över till nästa rad vid 60. Andra kommer att se att de kan gå ner 30 och sedan räkna baklänges 1. Eleverna diskuterar varför denna metod fungerar och jämför de båda metoderna.
- Visa hur detta sätt modellerar en tanke:
  Beräkna 26 + 19: 26, 36, 46, 45.
- Eleverna kan öva och säga andra additioner med tvåsiffriga tal först med och sedan utan att använda 0 – 99 kortet.

Subtraktion

Sättet att modellera subtraktion kan utvecklas ur det för addition, flyttning uppåt och åt vänster i stället för nedåt och åt höger. Detta ska man emellertid inte ha alltför bråttom med, speciellt med beräkningar som till exempel 65 – 28, som kan omtolkas till 65 – 30 + 2. För många elever är ”addera 2” inget självklart drag här. Kom ihåg att syftet är att modellera beräkningar i huvudet. Eleverna skall därför ständigt uppmanas att säga högt hur de flyttar fingrarna och vilka allmänna strategier de har i sin huvudräkning.

Från huvudräkning till skriftlig beräkning

Strukturen i projektet Developing Computation (McIntosh, 2002b; 2003a; 2003b), som har studerat övergången från huvudräkning till skriftlig beräkning, framgår av Tabell 1 (observera att skolåret i Australien startar i januari).

Tabell 1. *Strukturen i the Developing Computation Project*

Stadium	Varaktighet	Fokus
1	juni – dec 2001	Lärarna bekantar sig i sina klasser med utveckling av huvudräkning med hjälp av strategier. Inga restriktioner när det gäller undervisning om standardalgoritmer.
2	jan – maj 2002	Utveckling av huvudräkning med hjälp av strategier, med nya klasser. Ingen undervisning om standardalgoritmer i dessa klasser.
3	maj – okt 2002	Utforskning av och uppmuntran till informella skriftliga algoritmer. Utveckling av huvudräkning med hjälp av strategier fortsätter. Ingen undervisning om standardalgoritmer.
4	okt – dec 2002	Lärarna fattar egna beslut angående undervisning i huvudräkning, uppmuntran av informella skriftliga metoder och undervisning om standardalgoritmer.

Tabell 2 visar den process med sex stadier som lärarna använde för övergången från huvudräkning till informell skriftlig beräkning.

Tabell 2. *Process i sex steg för övergång från huvudräkning till informell skriftlig beräkning*

Stadium	Process
1	Stärka barnens huvudräkning med tvåsiffriga tal.
2	Uppmuntra barnen att förklara sina metoder med hjälp av papper och penna.
3	Jämföra, diskutera och förfina deras skriftliga förklaringar.
4	Stärka denna metod med ytterligare beräkningar av liknande svårighetsgrad.
5	Utvidga användningen genom anpassning till beräkning av svårare exempel.
6	Befäst den som en ”förstådd, säker skriftlig metod”.

Traditionellt har formella skriftliga algoritmer introducerats innan barnen haft tillräckliga grundläggande tabellkunskaper och föga förståelse för positionssystemet. Aktivitet D förutsätter att barnen har utvecklat tillräckliga färdigheter i huvudräkning med tvåsiffriga tal, och i den processen utvecklat förståelse av positionssystemet, och att de har goda grundläggande tabellkunskaper. Målet är att bygga vidare på dessa färdigheter och bygga en bro över till informella metoder för skriftlig beräkning med större tal, så att barnen blir säkra på sina beräkningsmetoder och får tilltro till sina egna förmågor att handskas med tal.

Lärare i projektet Developing Computation torde fortfarande hävda att barn behöver lära sig de standardiserade skriftliga algoritmerna, men att denna process bör påbörjas upp till två år senare än för närvarande.

Aktivitet D

Utveckla informella skriftliga metoder

Eleverna skriver ner förklaringar till sina lösningsstrategier på en huvudräkningsuppgift, till exempel addition eller subtraktion med tvåsiffriga tal, och "bearbetar" sedan dessa förklaringar genom att stryka ord och göra den symboliska notationen klar och effektiv. De får sen i uppgift att använda denna "skrivna förklaring" som utgångspunkt för att utföra en beräkning, på papper, med större tal, till exempel en addition eller subtraktion med tre- eller fyrsiffriga tal.

Åldersgrupper

Årskurs 2–5 (helst innan någon formell skriftlig algoritm har etablerats). Detta är endast tillämpligt för barn som befinner sig på det stadium som beskrivs i första stycket under rubriken "Från huvudräkning till skriftlig beräkning".

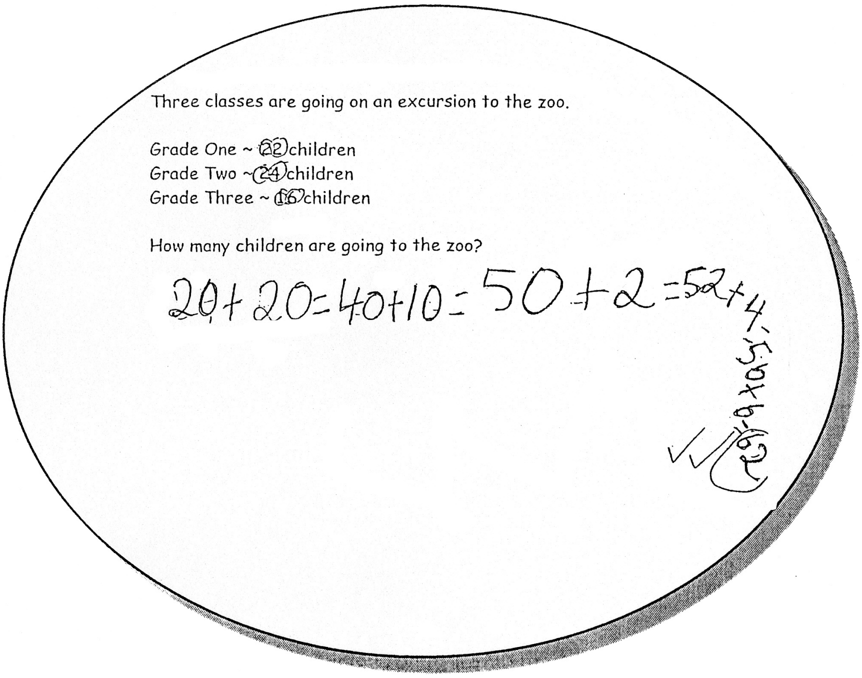
Material

Arbetsblad eller ett blankt papper

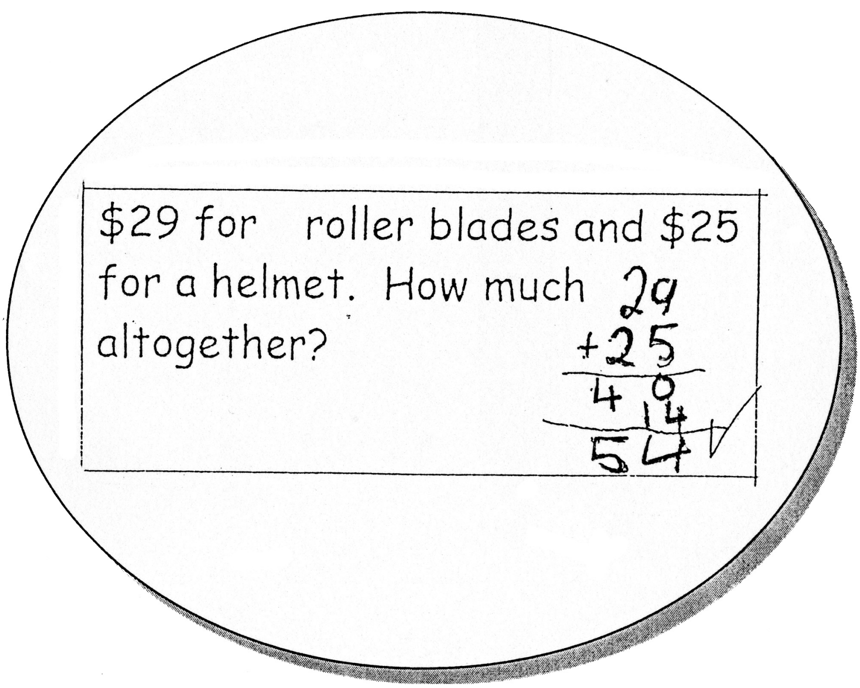
Aktiviteten

- Ge barnen en tvåsiffrig huvudräkningsuppgift som i aktivitet A. Be barnen att kortfattat men tydligt skriva ner hur de gör beräkningen.
- Om förklaringen beskriver en strategi som är (a) effektiv, (b) matematiskt giltig och (c) generaliserbar, uppmuntra barnet att förfina förklaringen genom att byta ut ord mot välorganiserade symboler.
- Ge barnet liknande huvudräkningsuppgifter med tvåsiffriga tal att förklara på exakt samma sätt.
- Ge barnet en likartad uppgift men med tresiffriga tal och be dem att använda sin tidigare metod för att beräkna svaret, med papper och penna.
- Om barnen kan göra detta, ge dem ytterligare utmaningar på samma eller högre nivåer.

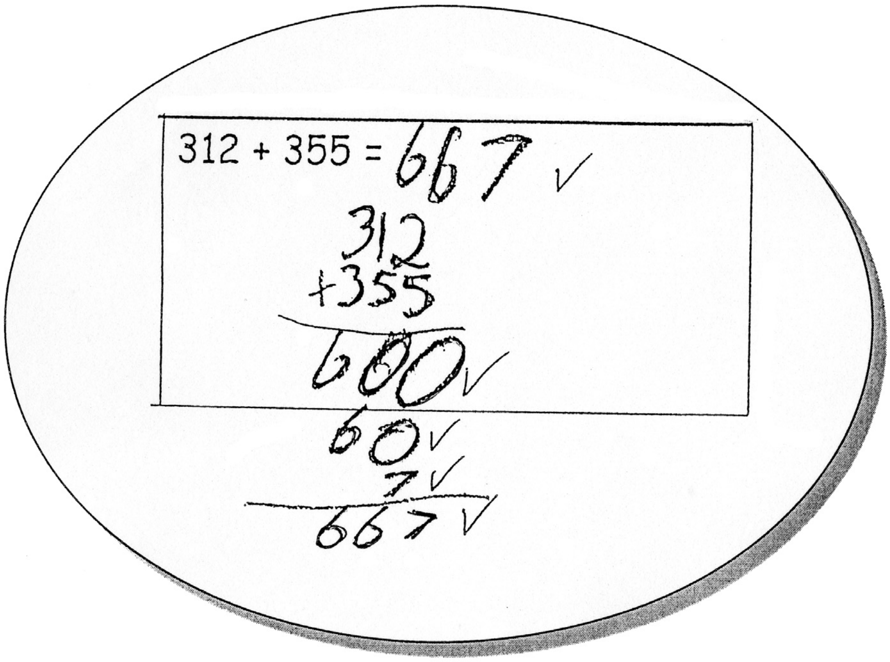
Figur 1, 2, och 3 visar ett barns framsteg under loppet av mindre än en månad, från stadium 2 till stadium 5, se tabell 2.



Figur 1. *Ett barns skriftliga förklaring av sin huvudräkningsmetod.*



Figur 2. *Samma barn beskriver en liknande beräkning efter "bearbetning".*



Figur 3. *Samma barn använder en liknande metod för att utföra en svårare beräkning.*

Bland de viktiga rönen från projektet Developing Computation kan nämnas:

- Samtliga lärare i projektet är överens om att koncentrationen på huvudräkning i hög grad har höjt barnens kompetens och självförtroende i arbetet med tal, och deras förståelse av positionssystemet.
- Samtliga lärare i projektet skulle nu rekommendera att undervisningen i formella skriftliga algoritmer skjuts upp, i de flesta fall åtminstone till årskurs 4.
- Samtliga lärare är överens om värdet av att utveckla informella skriftliga metoder som en bro mellan huvudräkning och formella skriftliga metoder.
- Nästan alla lärare skulle idag förorda undervisning i formella skriftliga metoder, men i ett senare skede i skolan än hittills.

Om vi ser på erfarenheterna av detta projekt och andra initiativ i Australien och annorstädes, mot bakgrund av moderna kursplaner och pedagogiska metoder, kan vi dra vissa slutsatser. Det förefaller som om utveckling av taluppfattning genom huvudräkning och informella skriftliga metoder inte bara är mer i linje med rådande idéer än vad koncentration på standardalgoritmer är. Ett sådant arbetssätt är också fullt möjligt redan i de tidiga skolåren.

Referenser

Biggs, J.B. (1967). *Mathematics and the conditions of learning*. Slough: National Foundation for Educational Research.

Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18* (2), 83–97.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.

Colburn, W. (1830). Teaching of arithmetic. I J.K. Bidwell & R.G. Clason (Red), (1970), *Readings in the history of mathematics education*(s 24–37). Washington: NCTM.

Ewbank, W.A. (1977). Mental arithmetic a neglected topic? *Mathematics in School*, *6*(5), 28–31.

Hope, J.A. (1987). A Case study of a highly skilled mental calculator. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 331–342.

Jones, P. (1988). Mental mathematics moves ahead. *Mathematics in School*, *17*(3), 42–44.

Kamii, C. & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(1), 51–61.

Levin, J.A. (1981). Estimation techniques for arithmetic: Everyday math and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 421–34.

McIntosh, A.J. (1994). *Mathworks: A new look at arithmetic and computation*. Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.

McIntosh, A.J. (2002a). Common errors in mental computation of students in Grades 3–10. I B. Barton, K.C. Irwin, M. Pfannkuch & M.O.J. Thomas (Red), *Mathematics Education in the South Pacific: Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (s 457–472). Auckland: University of Auckland.

McIntosh, A.J. (2002b, december). *Developing informal written computation*. Paper presenterat vid den årliga konferensen Australian Association for Research in Education, Brisbane.

McIntosh, A.J. (2003a, april). *Developing number sense through mental and informal written computation*. Paper presenterat vid ICASE 2003, the World Conference on Science and Technology Education, Penang.

McIntosh, A.J. (2003b, januari). *Approaching computation through mental computation*. Bidrag presenterat vid the Nineteenth Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers, University of Queensland.

Northcote, M. & McIntosh, A.J. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life? *Australian Primary Mathematics Classroom*, *4*(1), 19–21.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School* *8*(3), 2–5.

Wandt, E. & Brown, G. W. (1957). Non-occupational uses of mathematics: Mental and written approximate and exact. *Arithmetic Teacher*, *4*(4), 151–154.

Algoritmundervisning i tidiga skolår

DOUG M. CLARKE

En viktig fråga för lärare och kursplaneförfattare är när och hur undervisning i standardalgoritmer för de fyra räknesätten ska introduceras. I flera länder är detta en dominerande del av matematikundervisningen under tidiga skolår, med oroande effekter på såväl elevers förståelse som självförtroende. I detta bidrag sammanfattas forskningsresultat med speciellt fokus på tänkbara risker med att införa algoritmer för tidigt. Forskningsresultat från "The Early Numeracy Project" i Victoria, Australien tas upp. I detta projekt har fler än 36 000 elever i de första fem årskurserna intervjuats [1]. Dessa interaktiva intervjuer har gett data om vad barn vet och kan utföra under sina första år i skolan.

I artikeln drivs tesen att det under dessa år hellre bör ägnas tid till att fördjupa begreppsutveckling och huvudräkningsstrategier än till skriftliga beräkningar i standaralgoritmer. Det ges även exempel på verksamhet i klassrummet som på ett berikande, meningsfullt vis banar väg för formellt skriftligt arbete. Dessa inledande övningar utgår från och bygger på barns matematiska tänkande, något som torde gynna deras matematiska framtid.

Vad är en algoritm?

> [An algorithm is] a finite, step-by-step procedure for accomplishing a task that we wish to complete.
>
> (Usiskin, 1998, s 7)

> An algorithm takes input, follows a determinate set of rules, and in a finite number of steps gives output that provides a conclusive answer.
>
> (Maurer, 1998, s 21)

Att göra en kopp te följer ett slags algoritm: fyll kannan, sätt på plattan, hitta en kopp osv. Jag avser alltså vilken noggrant utförd "steg för steg"-procedur som helst som ger önskat resultat om man följer den noggrant.

---

[1] I Victoria börjar barn skolan i femårsåldern, första läsåret kallas Prep, förberedande.

När algoritmer diskuteras förutsätter de flesta att det gäller uppställningar med hela tal för de fyra räknesätten. Detta är också huvudtemat i denna artikel. Men det finns många algoritmer för huvudräkning och många viktiga algoritmer för andra sammanhang t ex för att finna medianen i ett statistiskt material eller kvadraten på ett algebraiskt uttryck. Dessa kommer inte att diskuteras här.

Några frågor kring skriftliga algoritmer

Med tanke på hur vanligt det är med undervisning och arbete med standardalgoritmer i tidiga årskurser måste det finnas ett antal skäl till att det fått en så framträdande plats. Plunkett (1979), Thompson (1997), Usiskin (1998) och andra författare anger flera motiv:

- Standardalgoritmer har sedan många år en central plats i matematikundervisning i tidiga skolår.
- Deras styrka ligger i att de kan användas för att lösa många problem, i synnerhet beräkning med många tal inblandade, då minnet kan överbelastas.
- Algoritmer är koncentrat, de sammanfattar flera beräkningssteg, inklusive distributivitet och associativitet.
- De är självgående, kan läras och användas utan att man behöver förstå hur och varför algoritmen fungerar.
- De är snabba, med en direkt väg till svaret.
- De ger skriftligt underlag för beräkningar vilket gör det lätt för lärare och elever att kontrollera och hitta fel.
- Algoritmen kan vara upplysande.
- De är lätta att hantera och utvärdera för läraren.

Vid första ögonkastet ser detta ut som en kraftfull uppräkning av orsaker till varför algoritmer även i fortsättningen borde ha en central plats i vår tidiga matematikundervisning. Emellertid har ett antal personer identifierat möjliga risker med algoritmundervisning i tidiga skolår (Kamii & Dominick, 1998; McIntosh, 1998; Northcote & McIntosh, 1999; Thompson, 1997; Usiskin, 1998). Dessa kan sammanfattas som följer:

- Algoritmerna överensstämmer inte med hur vi tenderar att tänka. Ett exempel: När det gäller de vanligaste algoritmerna betraktas ”4” i talet ”547” just som ”4” istället för som ”40”.
- Algoritmer uppmuntrar barn att ge upp sitt självständiga tänkande, vilket i sin tur leder till sämre internalisering av idéer (ownership of ideas). Det ursprungliga syftet med algoritmer var att tidigare århundradens notarier skulle kunna bemästra omfattande beräkningar på kort tid.

Tankeverksamhet var inte i fokus, snarare snabba och pålitliga svar. Teknikutveckling påverkar algoritmernas relativa betydelse, några blir mer betydelsefulla, andra mindre. Dagens notarier skulle använda antingen miniräknare eller utarbetade kalkylblad för att utföra många eller stora beräkningar.

- Den algoritm som traditionellt introduceras är kanske inte längre den mest effektiva eller lättaste att lära. Det finns t ex belagt att då miniräknare används regelmässigt för att uppmuntra begreppsmässig utveckling kan elever utveckla en algoritm för subtraktion som förenar förståelse för talets värde och därmed placering samt förståelse för negativa tal. För 354 – 278, kan ett barn använda en algoritm, med mellanled, som innehåller följande steg: 300 – 200 ger 100, 50 – 70 ger - 20, 4 – 8 ger - 4, vilket ger svaret 100 – 20 – 4 = 76. Jfr (Groves & Stacey, 1998; Shuard, 1990).
- Algoritmer tenderar att användas med överdriven nit och resultaten accepteras utan ifrågasättande. Barn använder algoritmer också när det inte alls är nödvändigt, dvs fokus på procedurer överskuggar tänkandet. Hopes (1986) exempel där uppställning används för att lösa 100 – 99,95 är ett klassiskt exempel på detta.

Som stöd för flera av dessa punkter noterar Askew (1999): ”there has been a huge amount of evidence from our national testing that once given a calculation in vertical form, kids automatically go on to do it column by column and do not think about it” (s 28).

Värt att notera är enligt Askew, att i England är förväntningarna i det nationella taluppfattningsprogrammet, ”the National Numeracy Project”, att 80 % av alla nioåringar ska kunna addera eller subtrahera två tvåsiffriga tal genom huvudräkning. Innan dess ska de inte arbeta med några vertikala beräkningar.

En annan fråga gäller relevans. Vuxna använder formella skriftliga metoder endast för en liten del av sina beräkningar. Northcode och McIntosh (1999) fann i en undersökning att bland 200 vuxna utfördes endast 11,1 % av alla beräkningar under en 24-timmars period med skriftliga metoder. Skriftliga algoritmer har blivit alltmer ovanliga utanför klassrummet. De flesta beräkningar kräver endast en uppskattning. De fann också i studien att 60 % av alla beräkningar endast krävde en uppskattning av det korrekta svaret. De sätt som traditionella algoritmer vanligtvis undervisas på hindrar användning av god taluppfattning, att först uppskatta och därefter pröva resultatets rimlighet.

Skadliga effekter vid tidig undervisning

Narode, Board & Davenport (1993) studerade under ett års tid 19 första-, andra- och tredjeklassare (5-, 6- och 7-åringar), med videoinspelade intervjuer. Samtliga elever skulle lösa tvåsiffriga additions- och subtraktionsberäkningar, i uppgifter med enkla textproblem i bekanta sammanhang, såsom stenar och kulor. Eleverna fick i uppgift att lösa varje problem genom att först använda tiobasmaterial, sedan genom huvudräkning eller med papper och penna, vilket de föredrog. Eleverna fick också frågan om de kände till ytterligare någon metod att lösa problemen. Intressant nog använde nästan alla, som intervjuats innan de undervisats om algoritmer, egna strategier som innebar att de räknade "framifrån", från vänster till höger, inte den vanliga från höger till vänster. Forskarna diskuterar fallet Jamie, en flicka i andra klass, som intervjuades flera gånger under skolåret. Det är viktigt att notera att Jamie inte mött standardalgoritmen före årskurs två men fick den presenterad andra året.

> Tidigt under höstterminen kunde Jamie framgångsrikt addera 19 och 26 med huvudräkning. "Jag vet att jag har 30 eftersom jag har ett tal med 10 och två 10 till. Och om jag tar 1 från 6 och ger till 9 har jag en 10 till. Då är det 5 kvar, så svaret är 45."
>
> Efter fem månader i skolan och arbete med algoritmer försökte Jamie addera 34 och 99 genom att identifiera och gruppera 10-talen, när hon plötsligt hejdade sig och sa, "Oh, jag måste ju sätta ihop entalen först". Därefter grupperade hon entalen och bytte till sig ett 10-tal för att lösa uppgiften.
>
> Under skolårets sista månad fick Jamie frågan om uppgiften gick att lösa genom att först summera 10-talen. Jamie svarade med eftertryck; "Nej, man börjar aldrig med 10-talen!" Hon fick frågan om problemet kunde lösas på något annat sätt. Jamie föreslog då att man kanske kunde hålla svaret i minnet. Slutligen fick hon möta sin egen strategi från läsårets början, men den presenterades som en metod någon använt för att addera 19 och 49. (Jag tänker på 50 + 19 och drar sedan ifrån 1 och får 68). När hon fick frågan om hon trodde denna metod skulle kunna fungera svarade hon: "Om man känner till det sättet går det bra, men det är mycket, mycket bättre att helt enkelt lägga ihop entalen först".
>
> (s 259)

Detta enskilda exempel är ett kraftfullt bevis på hur ett barn kan sluta lita på sin förståelse för tal och egna flexibla strategier och istället utan egentlig tvekan följa en enda utstakad väg. Narode, Board & Davenport sammanfattar sina resultat:

> We believe that by encouraging students to use only one method (algorithmic) to solve problems, they lose some of their capacity for flexible and creative thought. They become less willing to attempt problems in alternative ways, and they become afraid to take risks. Furthermore, there is a high probability that the students will lose conceptual knowledge in the process of gaining procedural knowledge.
>
> (s 260)

Data från Early Numeracy Research Project, ENRP

I detta avsnitt beskrivs data från ENRP i Victoria, Australien. 350 lärare i 35 skolor deltog i ett treårigt forsknings- och utvecklingsprojekt, där de mest effektiva ansatserna i matematikundervisningen under de första tre åren undersöktes. Här är projektets tre huvudkomponenter:

- En forskningsbaserad ram för ”tillväxtpunkter” (growth points) i barns matematiklärande, tal, mätning och geometri.
- 40 minuter långa intervjuer med varje barn som alla lärare genomförde i början och i slutet av läsåret.
- Omfattande kompetensutveckling på central-, regional- och skolnivå, för alla lärare, samordnare och skolledare.

Teorin för tillväxtpunkter kommer inte att närmare diskuteras här. För en mer ingående beskrivning, se Clarke (2001). Avsikten var att beskriva fem- till åttaåringars typiska inlärningskurva. Tillväxtpunkterna 4 och 5 i addition och subtraktion, som har betydelse i nedanstående resonemang är *grundläggande strategier (basic strategies)* och *härledda strategier (derived strategies)*. De beskrivs som följer:

Grundläggande strategier: dubblor, kommutativitet, lägga till 10, 10-kamrater, andra kända fakta. Problemlösning med subtraktion eller addition där någon av nämnda strategier är uppenbar.

Härledda strategier: nästan dubblor, lägga till 9, fyll upp till nästa 10-tal, talkamrater, informella strategier. Problemlösning med subtraktion eller addition där någon av dessa strategier är uppenbar.

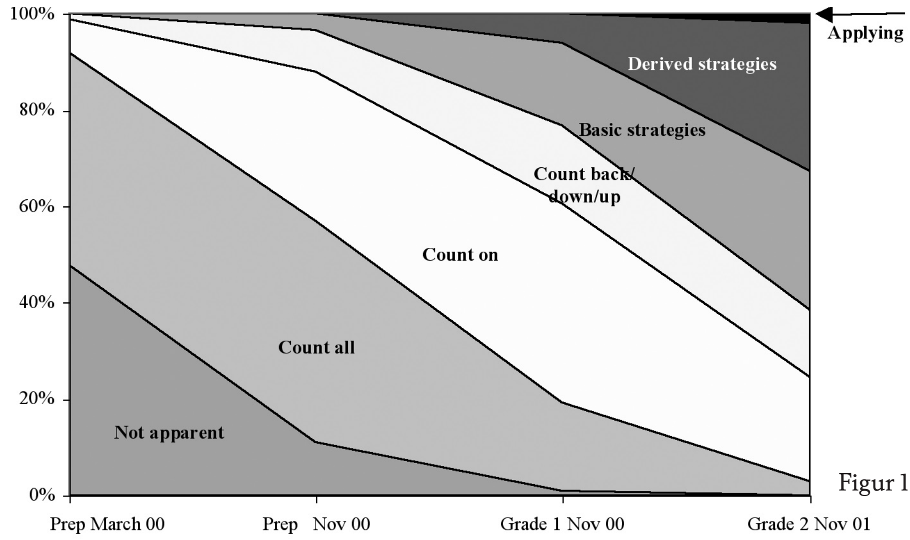
I projektet utvecklades sedan interaktiva intervjuer för en lärare och en elev. Dessa gav klasslärarna omfattande information om elevernas kunskaper och förmåga inom olika områden, både individuellt och som klass. Nackdelar med skriftliga test har belagts av Clements (1995) och andra. Dessa nackdelar blir extra tydliga när det gäller små barn, då läsförmågan är av stor betydelse.

När detta skrevs hade över 36 000 barn intervjuats de första fem skolåren inom projektet. I samband med varje intervju fyllde läraren i ett fyrsidigt formulär. Denna information kodades sedan av ett professionellt team, varpå tillväxtpunkter kunde bestämmas för varje barn inom varje område. Denna process, inklusive transformation av informationen kring tillväxtpunkter till statistiska data i en intervallskala, diskuteras av Horne & Rowley (2001).

För att anses framgångsrika i *grundläggande strategier för subtraktion och addition* skulle eleverna i intervjuer ge korrekta svar på huvudräkningsproblemen: $4+4$, $2+19$, $4+6$, $27+10$ och $10-7$. De skulle också välja prioriterade strategier för minst tre av dessa. Vad är då prioriterade strategier? För problemet $27+10$ skulle svaret bli 27, 37 (plus 10), eller 27 och 3 ger 30, ytterligare 7 ger 37 (bygger till nästa 10-tal). En icke-prioriterad strategi skulle vara 27, 28, 29 … 37 (räkna upp med ett steg i taget från 27). För att anses framgångsrik i *härledda strategier för addition och subtraktion* skulle barnen svara korrekt på 12 – 6, 7 + 8, 19 – 15, 16 + 5 samt 36 + 9. Vidare välja prioriterade strategier för minst tre av dessa. En prioriterad strategi för 7 + 8 skulle vara nästan dubblor (7 + 7 ger 14, så är det en till), en icke-prioriterad är 7, 8, 9, 10 … 15 (räkna upp med ett steg i taget från 7).

Diagrammet i figur 1 illustrerar hur stor andel av eleverna som vid en given tidpunkt framgångsrikt löser den här typen av uppgifter och hur länge en typisk elev uppehåller sig på en viss tillväxtpunktsnivå. Det visar prestationen vid skolstarten (i Victoria börjar barn skolan i femårsåldern), vid slutet av första läsåret (som kallas Prep, förberedande), vid slutet av klass 1 samt slutet av klass 2.

Dessa barn gick alla i ENRP försöksskolor de tre år som projektet pågick ($n = 897$). Lärarna i försöksskolorna samarbetade nära med forskarlaget för att undersöka effektiva metoder i matematikundervisning, så försöksskolornas resultat är avsevärt bättre än kontrollskolornas.



Figur 1

Diagrammet kan läsas såväl vertikalt som diagonalt. Längs den vertikala axeln syns fördelningen av tillväxtpunkter för prep-barn vid skolårets början. Knappast några prep-barn kunde använda vare sig grundläggande eller härledda strategier när de började skolan, vilket inte var förvånande. Ungefär 7 – 8 procent av barnen kunde räkna vidare när de ombads ge summan av nio objekt och ytterligare fyra. De flesta behövde börja på ett och sedan räkna alla, eller kunde inte summera nio och fyra på något sätt.

Vid slutet av årskurs två kunde cirka 35 % av eleverna framgångsrikt använda härledda strategier och cirka 30 % kunde använda grundläggande men inte härledda strategier. Fastän det inte visas här samlades också data in för mer än 1 000 tredje- och fjärdeklassare, på samma uppgifter. Till och med vid slutet av årskurs fyra var det endast 55 % av eleverna som klarade alla uppgifter som krävde härledda strategier.

Den här typen av diagram ger oss också möjlighet att läsa informationen diagonalt, från nedre vänstra till övre högra hörnet. Där kan vi göra jämförelser och se hur länge barn stannar vid respektive tillväxtpunkt. Diagrammet visar till exempel att utvecklingen från ”räkna alla” till ”räkna vidare” oftast är rätt utdragen.

Dessa data leder till följande fråga: Om endast 35 % av eleverna vid slutet av årskurs 2 och 55 % av eleverna vid slutet av årskurs 4 framgångsrikt använder härledda strategier, hur lämpligt är det då att påbörja undervisning i algoritmer under skolans första fem år?

Ska elevers egna algoritmer alltid godkännas?

Det är naturligt för barn att notera sitt tänkande på papper, när talen blir för stora för att allt ska rymmas i minnet. I en tillåtande, uppmuntrande miljö börjar barn utveckla egna algoritmer. När detta sker uppstår frågorna: Är alla elevkonstruerade algoritmer acceptabla? Hur skall elevernas egna algoritmer mötas i klassrummet? Tidigt under skoltiden, förutsatt att algoritmen leder till rätt lösning, är svaret förmodligen ”naturligtvis”. Men med tiden vill vi uppmuntra eleverna att överväga om proceduren är

- tillräckligt effektiv för att klara regelbunden användning utan stor tidsförlust,
- matematiskt korrekt,
- generaliserbar. Kan algoritmen tillämpas fullt ut på problem av samma typ som det lösta?

(Campbell, Rowan & Suarez, 1998)

Ibland påstår lärare att ”bara de begåvade barnen kan skapa egna algoritmer”. De som arbetar i projekt där barnen inspireras att skapa egna algoritmer bestrider detta. Men även om det vore sant så produceras en stor variation av egna algoritmer. Dessa kan i sin tur presenteras och diskuteras i gruppen så att barn som inte lyckas hitta egna metoder åtminstone ges flera möjligheter att välja bland.

När ska standardalgoritmer introduceras?

Jag anser att standardalgoritmer inte bör ingå i undervisningen under de första fem skolåren. Om de dyker upp, vilket de sannolikt kommer att göra med tanke på föräldrars och syskons inblandning bör de diskuteras.

Genom att ge aritmetiken problemlösningsfokus och låta elever möta en mängd varierade problem (företrädesvis i berättelser som intresserar barn) förändrar vi elevernas roll från att som Lampert (1989) skriver: ”*remembering* what to do and in what order to do it, to a problem of *figuring out* why arithmetic rules make sense in the first place” (s 34).

En grund för att skapa sådana textproblem i muntlig form är s k CGI-problem (Cognitively Guided Instruction), se också (Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs & Empson, 1996). Mitt förslag är att använda många problem med större och större tal, för att utmana eleverna att finna lösningar med den metod de finner lämplig. Genom att beskriva sina metoder kan barn påbörja processen att bedöma olika modellers matematiska giltighet, effektivitet och generaliserbarhet. När eller om de så småningom möter standardalgoritmer har de en god grund för att jämföra olika metoder utan att tvingas ge upp det de tidigare lärt.

Sammanfattande tanke (från 1830)

> The learner should never be told directly how to perform any operation in arithmetic. ... Nothing gives scholars so much confidence in their own powers and stimulates them so much to use their own efforts as to allow them to pursue their own methods and to encourage them in them.
>
> (Colburn, 1830/1912, s 463)

Några förslag på undervisningsmetoder

I denna artikel såväl som i andra bidrag i denna bok (se t ex McIntosh), har vi argumenterat för att det finns många bra aktiviteter som lärare kan engagera eleverna i innan algoritmer tas upp. Här följer beskrivningar av några sådana. Många menar att fokus på standardalgoritmer bör senareläggas tills små barn bekantat sig ordentligt med såväl grundläggande som härledda strategier för räknesätten. De undervisningsstrategier som presenteras kan skapa en bra grund för en senarelagd introduktion av standardalgoritmer (om den genomförs).

Jag föreslår nu att ni som läsare går igenom de olika undervisningsförslagen och väljer ett eller flera som ni tror skulle vara särskilt värdefullt för era elever att pröva!

Utvecklande problem med ökad svårighetsgrad

När barn utvecklar huvudräkningsstrategier för de fyra räknesätten är det viktigt att processen äger rum i olika kontexter. I (Carpenter m fl, 1999) pekar författarna på att barn ofta bara möter ett begränsat urval textproblem i skriftlig eller muntlig form. Subtraktionsuppgifter presenteras t ex ofta endast i formen ”ta bort”, och begreppet skillnad utelämnas. Vissa former är svårare än andra, t ex förändring där utgångsvärdet är okänt. Figur 2 visar olika kategorier av textproblem i subtraktion och addition.

Använd dessa problemuppgifter, ändra tal och innehåll för att problemen ska passa elevers intressen. Kanske vill du presentera dem på kort och på så vis uppmuntra eleverna att försöka lösa problemen med eller utan material och sedan jämföra metoder samt svårigheter och möjligheter med olika strategier. Som lärare kan du anteckna vad de observerar och senare diskutera detta med dina kolleger.

Problemtyp			
Lägga ihop	*Okänt resultat* Connie har 5 kulor. Juan gav henne ytterligare 8. Hur många kulor har Connie sammanlagt?	*Okänd förändring* Connie har 5 kulor. Hur många fler ska hon få för att sammanlagt ha 13?	*Okänt utgångsvärde* Connie hade några kulor. Juan gav henne 5. Nu har hon 13 . Hur många hade hon från början?
Dela upp	*Okänt resultat* Connie hade 13 kulor. Hon gav 5 till Juan. Hur många kulor har Connie kvar?	*Okänd förändring* Connie hade 13 kulor. Hon gav några till Juan. Nu har hon 5 kulor kvar. Hur många gav Connie till Juan?	*Okänt utgångsvärde* Connie hade några kulor. Hon gav 5 till Juan. Nu har hon 8 kulor kvar. Hur många kulor hade Connie från början?
Helhet-del-del	*Helhet okänd* Connie har 5 röda och 8 blå kulor. Hur många kulor har hon?	*Del okänd* Connie har 13 kulor. 5 är röda och resten är blå. Hur många blå kulor har Connie?	
Jämföra	*Skillnad okänd* Connie har 13 kulor. Juan har 5. Hur många fler kulor än Juan har Connie?	*Jämföra, antal okänt* Juan har 5 kulor. Connie har 8 fler än Juan. Hur många kulor har Connie?	*Referent okänd* Connie har 13 kulor. Hon har 5 kulor fler än Juan. Hur många har Juan?

Figur 2. *CGI-uppgiftstyper för addition och subtraktion (Carpenter m fl, 1999, s 12)*

Hjälpsummor för att undersöka relationer

I Nederländerna används ofta s k ”hjälpsummor”. Eleverna får t ex veta att $16+27=43$ (hjälpsumman). Sedan ska de slutföra följande beräkningar:

$16+26$, $27+16$, $160+270$, $15+27$, $43-16$, $16+16+27+27$, $17+26$

Ett alternativ eller en variant på att ange hela listan är att ge följande samband, $15+27=42$. Sedan får eleverna svara på frågan: ”Vad vet ni mer?” På detta vis fokuserar klassen på hur vi ska använda det vi vet och bygga vidare på detta för att kunna komma fram till sådant vi inte känner till.

Hur många siffror?

För att utveckla barns taluppfattning och förmåga att göra uppskattningar läggs mer tid på noggrann behandling av strategier istället för som tidigare på ett stort antal beräkningar. När det gäller följande problem får eleverna emellertid arbeta med ganska många beräkningar, men de ska inte räkna ut eller ens uppskatta svaren. Deras uppgift är endast att avgöra hur många siffror svaret kommer att innehålla och att ange svaret i hundratal, tusental eller vad det är. Uppgiften kan presenteras på följande vis:

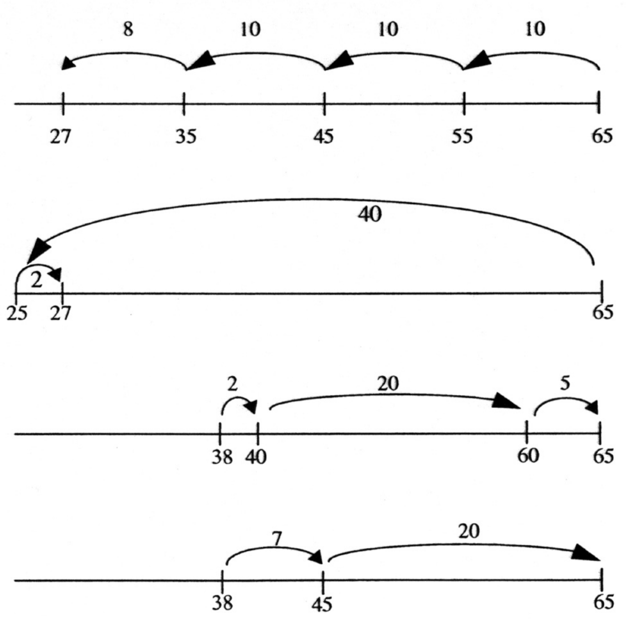
> Uppskatta inte svaret. Avgör hur stort varje svar kommer att bli, t ex hur många hundratal:
>
> $143 + 679$, $134 + 979$, $724 + 302$, $249 + 457 + 391$,
> $3027 - 283$,
> 12×256, 638×5, $9 \times 34 \times 19$,
> $2415 \div 4$, $278 \div 14$, $47609 \div 437$

Hundra till och tio färre

Som en del i ENRP-projektets utvärderingsintervjuer skulle eleverna uppge det tal som är 10 större än detta tal (2791) och sedan det tal som är "100 mindre än detta tal" (3027), om de lärt sig läsa, skriva, ordna och tolka en-, två- och tresiffriga tal. Eleverna upplevde dessa uppgifter som mycket svåra. Att kunna lösa exempel av den här karaktären verkar vara en värdefull förberedelse för fortsatt arbete med algoritmer, vare sig det är standardalgoritmer eller barnens egna. Elever kan få ett antal uppgifter av den här typen för att sedan redogöra för sina strategier för resten av gruppen. En tänkbar introduktion är ett spel på ett 0 – 99-kort (ett rutnät, där talen 0 till 99 skrivits in i tio rader med tio tal i varje rad). Barnen kastar tärning som avgör hur de ska förflytta sig över kortet. Tärningens sidor kan till exempel instruera barnen att "lägga till 10", "dra ifrån 10", "lägga till 11", "dra ifrån 11", "lägga till 9" eller "dra ifrån 9". Ett annat kort kan ha större tal och en tärning kan då visa "lägg till 100", "dra ifrån 100" osv.

Den tomma tallinjen – en kraftfull övergång mellan huvudräkning och algoritmer

Den tomma tallinjen utvecklades av Whitney (1985) i Amerika. Den har använts flitigt i Nederländerna sedan den introducerades där av Treffers (1991) och användningen har ökat i Australien och Storbritannien. När elever arbetar med denna markerar de endast de tal de behöver för sina uträkningar. Det föreslås som ett didaktiskt verktyg för addition och subtraktion (Gravemeijer, 1994). För att belysa möjligheterna ges följande exempel på hur vi kan finna svaret på 65 – 38.



Inledningsvis räknar barn framåt eller bakåt ett och ett för att lösa subtraktionsproblem. Men allt eftersom talen blir större måste beräkningsmetoderna utvecklas. Den tomma tallinjen ger god hjälp för detta. En god egenskap är att det tydligt går att representera de huvudräkningsstrategier som många barn och vuxna föredrar, till skillnad från många algoritmer.

Genomskinliga additions- och multiplikationsmetoder

Askew och Ebbutt (2000) diskuterar algoritmer. De grundar sig på att barn som inte stött på standardalgoritmer och de flesta vuxna vanligtvis använder "räkna från vänster" när de räknar med flersiffriga tal i huvudet. De menar att ett bra sätt att introducera skriftliga metoder är att be barnen lägga samman en lång rad av tal. Det är svårt att klara i huvudet, alltså är papper och penna bra att ha och det är en bra strategi att börja med det mest betydelsefulla talet (s 26).

Exemplet de valt för att belysa ovanstående är:
45 + 5243 + 3 + 267 + 3189 och de ställer upp som följer

$$\begin{array}{r}
45\\
5243\\
3\\
267\\
3189\\
\hline
8000\\
500\\
220\\
27\\
\hline
8747
\end{array}$$

De påpekar värdet av att presentera uppgiften horisontellt, eftersom det då är troligare att de själva väljer hur de ska göra. Detta ökar möjligheten att de t ex ska summera 3 och 267 innan de startar.

Referenser

Askew, M. (1999). Woe betide the kid who has measles. *Australian Primary Classroom*, *4*(2), 27–31.

Askew, M. & Ebbutt, S. (2000). *The numeracy file*. London: Beam Education.

Campbell, P. F., Rowan, T. E. & Suarez, A. (1998). What criteria for studentinvented algorithms? I L. J. Morrow & M. J. Kenney (Red), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s 49–55). Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T. A., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Clarke, D. M. (2001). Understanding, assessing and developing young children's mathematical thinking: Research as powerful tool for professional growth. I J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Red), *Numeracy and beyond: Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, s 9–26). Sydney: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Clements, M. A. (1995). Assessing the effectiveness of pencil-and-paper tests for school mathematics. I B. Atweh & S. Flavel (Red), *Galtha: MERGA 18: Proceedings of the 18th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s 184–188). Darwin, NT: University of the Northern Territory.

Colburn, W. (1830). Teaching of arithmetic. I J.K. Bidwell & R.G. Clason (Red), (1970), *Readings in the history of mathematics education*(s 24–37). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics. (Återpublicerad från Elementary School Teacher, 1912, 12, 463–80.)

Fennema, E., Carpenter, T.P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R. & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403–434.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Groves, S. & Stacey, K. (1998). Calculators in primary mathematics: Exploring number before teaching algorithms. I L. J. Morrow & M. J. Kenney (Red), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s 120–129). Reston, VA: NCTM.

Hope, J. A. (1986). Mental calculation: Anachronism or basic skill? I H. Schoen & M. J. Zweng (Red), *Estimation and mental computation* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s 45–54). Reston, VA: NCTM.

Horne, M. & Rowley G. (2001). Measuring growth in early numeracy: creation of interval scales to monitor development. I M. van den Heuvel-Panhuizen (Red), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3* (s 161–167). Utrecht: Freudenthal Institute.

Kamii, C. & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1–4. I L. J. Morrow & M. J. Kenney (Red), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s 130–140). Reston, VA: NCTM. 36

Lampert, M. (1989). Arithmetic as problem solving (Research into Practice series). *Arithmetic Teacher*, *36*(7), 34–36.

Maurer, S. B. (1998). What is an algorithm? What is an answer? I L. J. Morrow & M. J. Kenney (Red), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s 21–31). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. I L. J. Morrow & M. J. Kenney (Red), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s 44–48). Reston, VA: NCTM.

Narode, R., Board, J. & Davenport, L. (1993). Algorithms supplant understanding: Case studies of primary students' strategies for double-digit addition and subtraction. I J. R. Becker & B. J. Preece (Red), *Proceedings of the fifteenth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, s 254–260). San Jose, CA: Center for Mathematics and Computer Science Education, San Jose State University.

Northcote, M. & McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life? *Australian Primary Mathematics Classroom*, *4* (1), 19–21.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School*, *8*, 2–5.

Shuard, H. (1990). *Developing a calculator-aware number curriculum in Britain*. Unpublished manuscript. Homerton College, Cambridge, England.

Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: Can the gap be bridged? I I. Thompson (Red), *Teaching and learning early number* (s 97–109). Buckingham, UK: Open University Press.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematical program for primary education. I L. Streefland (Red), *Realistic mathematics education in primary school* (s 21–57). Utrecht, The Netherlands: CD-β Press.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator and computer age. I L. J. Morrow & M. J. Kenney (Red), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s 7–20). Reston, VA: NCTM.

Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. I L. Streefland (Red), *Proceedings of the ninth international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s 123–141). Noordwijkerhout, The Netherlands: PME.

Generalisering av numeriska utsagor

MAX STEPHENS

Hur kan vi arbeta med algebraiskt tänkande i åldrarna 6 – 12 år? Detta bidrag handlar inte om att flytta högstadiets algebra till tidigare årskurser. Det handlar inte heller om att lära små barn använda bokstavssymboler, vilket många ser som starten i algebra. Avsikten är att se på aritmetikens inneboende algebraiska natur. Det handlar om att överbrygga klyftan mellan aritmetik och algebra i skolans undervisning. I många länder finns en strävan att ta aritmetiken bort från ensidig inriktning på beräkningar. Att ge effektivare och mjukare övergång från studier av talmönster och relationer i tidiga skolår till senare studier av formell algebra. Räknefärdigheter kan inte längre vara det starkaste argumentet för att studera aritmetik. Vi vet inte säkert åt vilket håll utvecklingen kommer att gå, men vi ser tydliga tendenser att ifrågasätta fokus på räknande.

Artikeln visar hur barns erfarenheter av talmönster och relationer i tidiga skolår kan användas för att ge dem känsla för algebraiska representationer och samtidigt bli bekanta med algebraiskt tänkande.

Algebra och aritmetik behöver komma närmare varandra

Varför skulle ytterligare en undersökning av förhållandet mellan aritmetik och algebra vara viktig för utvecklingen av skolans undervisning i matematik? Det finns flera skäl till att det är hög tid att ifrågasätta den traditionella klyftan mellan dessa två områden. Aritmetik och algebra har skilda bakgrunder och har fått sin plats i nuvarande kursplaner med helt skilda strukturer för kommunikation. För att uttrycka det enkelt, undervisning i aritmetik karaktäriseras oftast av proceduriellt tänkande med fokus på att finna svar och metoder eller procedurer som leder till rätt svar, eller till att kontrollera detta. Å andra sidan beskrivs algebraiskt tänkande ofta som relationellt eller strukturellt (Kieran, 1992). I algebra är målet att upptäcka, identifiera och kommunicera generaliserbarhet och struktur. Tyvärr är det så att många elever uppfattar algebra som en samling regler och procedurer, och för dessa elever blir den med tiden alltmer svårbegriplig. Algebra blir då ett oöverstigligt hinder i högstadiematematiken.

Algebra och aritmetik har spelat helt olika roller i skolundervisningen. Aritmetik har betraktats som ett huvudområde i den obligatoriska undervisningen. Algebra reserverades för högstadiet och ibland bara för dem som ansågs ha förmåga till abstrakt symboliskt tänkande. Dessa uppfattningar saknar idag relevans. Andra argument gör det möjligt att ifrågasätta den traditionella klyftan mellan aritmetik och algebra. Dels dyker olika former av numerisk algebra nu upp och utmanar högstadiealgebrans privilegierade position, dels har aritmetiska uttryck alltid varit möjliga att betrakta som algebraiska objekt, i synnerhet före reducering. I korthet: den traditionella klyftan mellan aritmetik och algebra är inte längre försvarbar i moderna matematikkursplaner.

Hinder i tidigt algebraiskt tänkande

Carpenter och Franke (2001) pekar på en utbredd uppfattning bland forskare: "att barn i tidiga årskurser normalt uppfattar likhetstecknet som en uppmaning att utföra en operation med de tal som föregår tecknet, och att detta är en av de stora stötestenarna när det gäller att ta sig vidare från aritmetik till algebra" (Kieran, 1981; Matz, 1982). För att uppfatta aritmetiska uppställningar som algebraiska objekt, i synnerhet när dessa uppställningar inte är uträknade, krävs vad Collis (1975) benämnde "acceptance of lack of closure", ALC, acceptans för att inte 'stänga uttrycket' genom att utföra beräkning. Han menade att ALC är en nyckel till algebraiskt tänkande. För övrigt betraktade han också ALC som en indikator på det Piaget kallar "de konkreta operationernas period", som Collis menade krävdes för att förstå algebra. Detta argument har felaktigt använts för att rättfärdiga att alla former av algebra tagits bort från de tidiga skolårens matematik. På 1970-talet innehöll test som Collis utarbetade för Australian Council for Educational Research (ACER) uppgifter som

$$7 - 5 + \square = 7$$

$$746 - 263 + \square = 746$$

I den första uppgiften kan man gissa, eller tänka sig, eller räkna ut att 5 saknas. Emellertid menar Collis (1975) att den andra uppgiften blir mycket svår om den beräknas, dvs om eleven skriver att 746 – 263 är lika med 483. Här måste eleven söka motstå lusten att utföra beräkningen och "sluta" uttrycket.

Carpenter och Levi (1999), å andra sidan, lät första- och andraklassare se uttryck som antingen var sanna eller falska. En av de utsagor som användes var

$$78 - 49 + 49 = 78.$$

När barnen fick frågan om de trodde denna var sann eller falsk svarade alla barn utom ett att den var sann.

Ett barn sa: "Det är sant för först tog du bort 49 och det är precis som att få tillbaka det". Detta exempel visar, för det första, att små barn kan uppvisa helt insiktsfullt algebraiskt tänkande när de erbjuds rätt material. För det andra hamnar fokus inte på beräkningen. Målet är att rikta barns uppmärksamhet på den underliggande matematiska strukturen i likheten

$$78 - 49 + 49 = 78.$$

Carpenter och Levi bad inte barnen att utföra en beräkning av talen till vänster om likhetstecknet. Deras exempel är inte heller bundet specifikt till talen 78 eller 49. Utsagan $78-49+49=78$ är en generaliserbar numerisk likhet eftersom den är en i en ”familj” av utsagor som exemplifierar samma underliggande matematiska relation. Elever som kan förklara varför denna specifika utsaga är sann kan också skapa andra exempel med samma typ av relation. De inser att dessa utsagor är sanna av samma skäl som $78-49+49=78$ är det.

Generaliserbara numeriska utsagor

Några andra exempel:

$$312-123=313-124$$

$$546+234=545+235$$

Ett viktigt drag hos dessa utsagor är att likhetstecknet står för en relation mellan talen på likhetens båda sidor. Det är inte en uppmaning att utföra en beräkning. Eleverna blir tvungna att acceptera att beräkningarna inte är utförda i dessa aritmetiska utsagor, de är inte ”slutna”. Genom att de lämnas i ej reducerad form kan deras sanning bevisas genom undersökning av relationen mellan talen. *Det finns goda skäl till att använda termen ”generaliserbara” i fall som dessa för utsagor där en strukturell regel eller en relation mellan tal kan användas för att generera andra utsagor, där sann eller falsk kan beläggas genom hänvisning till en genererande regel för utsagorna snarare än beräkningen.* Andra exempel kanske först inte är så uppenbara, såsom likheterna nedan till vänster:

$$312-123=423-234, \quad 312-123=(312+111)-(123+111)$$

$$546+234=445+335, \quad 546+234=(546-101)+(234+101)$$

Att likheterna till vänster är sanna kan förklaras utan att man använder addition eller subtraktion för att visa att värdet är detsamma på båda sidor om likhetstecknet. Som likheterna ovan till höger visar är de varianter av de formella likheterna:

$$a-b=(a+c)-(b+c) \text{ och } a+b=(a-c)+(b+c)$$

Att inse sanningen i specifika numeriska utsagor och att kunna förklara varför, utan att förlita sig på fullständig beräkning, eller att kunna använda dem för att generera nya uttryck, kräver inte kunskap om motsvarande formella uttryck.

Gå vidare från likheter där tal saknas

Arbete med generaliserbara numeriska utsagor erbjuder i grundskolan en motvikt till användning av utsagor där tal saknas. Att söka värdet av en ”obekant” dominerar där ofta elevers och lärares tänkande. Som Radford (1996) påpekar: ”Medan det okända representerar ett oföränderligt tal, är variabler något vars värde kan ändras” (s 47).

När vi använder utsagor där tal saknas, som □ + 8 = 23 och 63 – ○ = 49 kan lärare tro att de introducerar algebra, eftersom de sysslar med okända tal. Senare kommer dessa likheter att skrivas med bokstavssymboler i ekvationer:

$x + 8 = 23$ och $63 - y = 49$

Också när bokstavssymboler används är många elever beroende av beräkningsmetoder för att lösa den här typen av problem. I stället kan vi be elever att avgöra vilket tal som saknas i uttryck, t ex i

$55 + 29 = 53 + \square$

utan att beräkna vänsterledets värde. Då tvingas eleverna att överge beräkningstänkandet till förmån för relationellt tänkande. Först då blir det möjligt för dem att skapa nya, liknande exempel. Naturligtvis behöver en del elever särskilt stöd för att kunna lämna sina invanda beräkningsorienterade tankebanor och detta kommer att diskuteras längre fram.

Sammanfattningsvis kan diskussion av generaliserbara numeriska likheter under de första skolåren skapa en användbar och tillgänglig inkörsport till begreppet variabel. Att endast använda utsagor där tal utelämnas kan skapa problem längre fram när eleverna möter variabla storheter.

Möte med och diskussion kring dessa likheter låter barn bekanta sig med det som kan kallas ”dold algebra”. Där används inte bokstavssymboler och generaliserbara numeriska utsagor ser inte ut som högstadiealgebra. Men de samtal som dessa kan locka fram, och det sätt att tänka som krävs för att förstå innebörden, är tydligt algebraiska. I det följande redovisas pågående forskning i Australien och Japan där man studerar användningen av generaliserbara numeriska utsagor för att synliggöra algebraiskt tänkande hos barn i åldrarna åtta till nio år, motsvarande årskurs 2 och 3.

Peters metod

Nyss nämnda forskning använder en textbaserad intervjudialog med en metod för att subtrahera 5 som faktiskt användes av en elev, Peter. Syftet med intervjun är att avgöra hur hågade små barn är att se de strukturella dragen i Peters metod. Med andra ord, kan de ägna sig åt generaliserbart numeriskt tänkande som det beskrivs av Fujii & Stephens (2001) och hur kan de i så fall ge utryck för sådana tankar? I intervjuerna visas och läses subtraktioner och anvisningar för barnen, se rutan på nästa sida.

Vissa elever har problem med att skriva om uppgiften på ett sätt som svarar mot Peters metod. De går direkt till svaret. När dessa elever ombeds förklara varför Peters metod fungerar svarar de att det är för att den ger rätt svar. Ibland föredrar de att diskutera sin egen metod att subtrahera 5 som t ex i, 32 – 5.

Peters metod

Den första meningen lyder: *Peter subtraherar 5 från några tal.* Sedan fortsätter texten med Peters svar:

$37 - 5 = 32$
$59 - 5 = 54$
$86 - 5 = 81$

Peter säger att de här är ganska lätta. Håller du med?
Men några andra är inte lika lätta, som:

$32 - 5$
$53 - 5$
$84 - 5$

Peter säger: "Jag räknar ut de här genom att först lägga till 5 och sedan dra ifrån 10, som $32 - 5 = 32 + 5 - 10$. *Att räkna ut det så är lättare."*

Ger Peters metod rätt svar? Titta på de andra uppgifterna som Peter har. Kan du använda Peters metod? Skriv först om varje uppgift med Peters metod och räkna sedan fram svaret.

En elev, Thomas (8 år och 3 månader, halvvägs i åk 2) sa: "5 är $2 + 3$. Så först tar jag bort 2 från 32 och får 30. Sedan tar jag bort 3 och får 27." Elever som Thomas verkar uppfatta Peters metod som en annorlunda och obekant beräkningsmetod. De föredrar sin egen och tycker det är svårt att följa Peters metod, men ger ingen kritik. Intervjun leder inte eleverna i en speciell riktning, men om barnen av ett eller annat skäl inte klarar att hantera Peters metod avbryts intervjun.

Alan, (8 år och 10 månader, i slutet av åk 2) gav en helt annan förklaring när han sa: "Istället för att ta bort 5, lägger han (Peter) till 5 och drar sedan ifrån 10. Om man lägger till 5 måste man dra ifrån 10 för att jämna ut det hela."

I denna förklaring kommer de strukturella elementen i Peters metod fram, och det antyds att Peters metod är generaliserbar. Barn som klarar att tillämpa Peters metod för $53 - 5$ och $84 - 5$ tillfrågas senare om de kan skapa egna exempel där 5 subtraheras med Peters metod. Därefter får de frågan om hur Peter ska använda sin metod för att subtrahera 6. Intervjuaren frågar:

Vilket tal skulle Peter skriva i rutan för att få rätt svar?

$73 - 6 = 73 + \square - 10$

Om eleverna löser den här uppgiften ombeds de ge fler exempel som visar hur Peters metod kan användas för att subtrahera 6. Slutligen får eleverna veta: Peter säger att hans metod fungerar för att subtrahera 7, 8 och 9. Sedan får eleverna frågan om de kan visa hur Peters metod skulle kunna användas för att omformulera följande tre subtraktioner:

83 – 7
123 – 8
235 – 9

I den sista delen av intervjun får eleverna möjlighet att förklara hur Peters metod fungerar. Formuleringen är betydelsefull:

Kan du förklara hur denna metod alltid *fungerar*?

Alan, som tidigare citerats, sa: ”För varje tal man tar bort, måste man lägga till det andra talet mellan 1 och 10 som tillsammans med det första ger 10; som 7 och 3 eller 4 och 6. Man drar ifrån 10 och då får man svaret.” Alans förklaring inbegriper på ett tydligt sätt generaliserat numeriskt tänkande. Han förstår att Peters metod inte är beroende av det inledande talet (83, 123 eller 235 i ovanstående exempel). Hans förklaring visar också på att Peters metod kan generaliseras för subtraktion av vilket tal som helst mellan 1 och 10.

Zoe, 8 år och 4 månader, gav en liknande förklaring: ”Oavsett vilket tal man drar ifrån behövs ett tal till för att de tillsammans ska bli 10. Man lägger till det talet för att få 10 och drar sedan ifrån 10. Till exempel, om man har 22 – 9, och man vet att 9 + 1 = 10, så lägger man 1 till 22 och drar sedan bort 10.”

En annan elev, Tim (9 år och 1 månad, i början av tredje året), sa: ”Här är en förklaring för alla tal. Oavsett vilket tal han (Peter) drar bort, lägger man till talet som skulle ge 10 och sedan drar man bort 10. Ju större tal man drar ifrån, desto mindre är talet som man lägger till. Det blir alltid 10 tillsammans.”

En japansk elev, Kou, (9 år och 6 månader i början av tredje året), förklarade: ”Det spelar ingen roll vilket tal som dras bort, när det adderade talet ger 10 är svaret alltid detsamma, oavsett om det subtraherade talet blir mindre eller större.”

Adam, (8 år och 6 månader i början av tredje året), resonerade så här: ”Om talet är under 10 finns det alltid ett tal som ger 10, så man kan alltid lägga till det och dra ifrån 10.”

Alla dessa elever klarade att bortse från utgångstalets värde när de lämnar sin förklaring. De insåg att det inte var viktigt för förklaringen. På så sätt visar de sig trygga med uttryck som inte är ”slutna”, ALC. Deras förklaringar fokuserar på att beskriva vad som kan betecknas $a - b$ och $a + (10 - b) - 10$ där b är ett heltal mellan 1 och 10. Dessa barn visar prov på algebraiskt tänkande. De kan förklara varför Peters metod alltid fungerar, ”oavsett vilket tal han tar bort” (Tim), ”oavsett vilket tal man tar bort” (Zoe), ”för varje tal man tar bort” (Alan), ”finns det alltid ett tal som ger 10” (Adam), ”oavsett om det subtraherade talet ökar eller minskar” (Kou).

Det fanns å andra sidan andra elever som behövde "sluta uttrycket" genom att först räkna 83 – 7, 123 – 8 och 235 – 9 och sedan ange talet som saknades i den tomma rutan på höger sida. Så småningom lyckades några hitta rätt tal. Men, intressant nog, kunde ingen svara på frågan om varför metoden alltid fungerade. De som började med att räkna ut talen till vänster om likhetstecknet verkade oförmögna att bortse från utgångstalet och kunde inte heller lämna uttrycket i oreducerad form. Det fanns tydliga skillnader mellan dessa elever och de som var trygga med att uttrycket inte var "slutet". Matematikinnehållet i de tidiga skolåren ger oftast inte mycket stöd för dessa elever att utveckla ALC.

Andra aspekter på intervjun

Bland tredjeårselever som tyckte uppgiften var svår kunde ingen enskild faktor pekas ut som förklaring till den uteblivna framgången. De stötte på svårigheter vid flera ställen under intervjun. Därför kan det vara upplysande att jämföra framgångsrika elever med mindre framgångsrika.

I den första delen av intervjun fick eleverna två uppsättningar subtraktionsproblem, som både visades och lästes för eleverna. Den första uppsättningen beskrevs av Peter som, "rätt lätta att räkna ut". Den andra uppsättningen hade uppgifter som, enligt Peter, "inte är så lätta". En elev påpekade att den första gruppen hade "fler än 5" vilket gjorde det enklare att subtrahera 5, medan den andra gruppen hade "färre än 5". En annan elev sa om 37 – 5 att Peter "vet att svaret kommer stanna i 30-talet", men i de andra problemen, "vet han att svaret inte kommer att stanna i samma tiotal ". Flera elever uttryckte att "hålla sig inom samma *tiotal* är inte svårt". Dessa elever kunde alla subtrahera automatiskt när talen var mindre än 10. Andra framgångsrika elever gav ytterligare en förklaring, "att gå in i *tiotalet under*" gör den andra gruppen svårare. De hänvisade till behovet av tiotalsövergång när till exempel 53 – 5 beräknades. I intervjuns nästa del där eleverna ombads att hitta på problem genom att använda Peters metod, föreslog en elev 75 – 5, men kommenterade snabbt, "Nej, han skulle inte använda sin metod där. 71 skulle vara bättre."

Elever i årskurs tre (ca nio år), som fortfarande förlitade sig på bakåträkning ett steg i taget, kunde inte förklara varför den ena gruppen var lättare än den andra. För dessa elever verkade svårigheter vid subtraktion associeras med storleken på talet som skulle subtraheras. Detta berodde på att de ännu inte automatiserat subtraktioner i talområdet upp till 10.

Peters metod framstod som lättare bara om eleverna var säkra på att subtrahera 10. En elev i årskurs tre räknade bakåt ett steg i taget för att subtrahera 10 och tyckte att det var svårt att hålla reda på talen. För 58 – 10 räknade hon högt 57, 56, 55, 54, 52, 51, 50, 49, 48, 47 och sa att svaret var 47. I andra fall räknade hon bakåt med 5 och sedan 5 igen. Detta underlättade för henne att hålla ordning på talen, men fortfarande var subtraktion med 10 en mödosam uppgift. Det var svårt att övertyga denna elev om någon som helst fördel med Peters metod.

Å andra sidan menade andra elever att, ”ta bort 10 är alltid lätt”. Automatiserad eller nästan automatiserad subtraktionstabell för tal under 10 och säkerhet när det gäller att subtrahera 10 genom att byta tiotal är viktigt för att kunna använda sig av och förstå Peters metod. För vissa elever verkade det snarast vara ett hinder att ersätta en operation med två, som i Peters metod.

Att ha självkontrollerande strategier spelar en viktig roll. När elever som framgångsrikt lärt sig Peters metod för att subtrahera 5 tillfrågades: ”Fungerar Peters metod om du subtraherar 6?” var det inte ovanligt att de först skrev 6 i den tomma rutan i uppgiften $73 - 6 = 73 + \square - 10$. Vissa korrigerade sig dock snabbt själva och ersatte 6 med 4. Andra fick uppmanas att kontrollera sina resultat. Ju längre det tog för eleverna att kontrollera sina resultat desto mindre troligt var det att de skulle se ett mönster i Peters metod.

Vissa elever tyckte att det var svårt att ge en genomtänkt förklaring till sitt arbete. En elev, Madeleine, som klarade att utföra alla beräkningar hade svårigheter med att förklara sitt tänkande. När hon, vid flera tillfällen under intervjun, fick frågan hur Peters metod fungerade svarade hon: ”Jag visste förut, men nu kommer jag inte ihåg det” eller ”Jag är inte säker, jag visste förut”. Till och med när hon framgångsrikt och effektivt slutfört samtliga problem på sista sidan kunde hennes försök till förklaring inte komma längre än: ”För varje tal lägger man till för att få 10”. Hon var riktigt säker på att hantera tal, men behövde helt klart utveckla sitt självförtroende för att kunna motivera tänkandet.

Det är viktigt att uppmärksamma kvaliteten i dessa förklaringar. Förklaringar som Madeleines är inte klara belägg för algebraiskt tänkande. Andra förklaringar från elever i tredje årskursen verkar inte mer än *sammanfatta* metoden som Peter använde. För att kunna belägga algebraiskt tänkande, sökte vi klara indikationer på att eleverna kunde gå längre än till en sammanfattning, till att generalisera mönstret som användes. Det framgår tydligt av intervjuerna att mycket unga elever kan klara detta framgångsrikt.

Utveckling av den tidiga matematikundervisningen

Att låta yngre elever möta algebraiskt tänkande är ingen lätt uppgift om lärares synsätt har begränsats till att betrakta aritmetik som räkning. I de tidigare åren innebär detta att vi bör uppmärksamma aritmetiska operationers symboliska karaktär.

Forskning tyder på att många av dagens elever misslyckas med att från sina tidiga erfarenheter få fram matematiska strukturer som krävs för att senare framgångsrikt övergå till algebra. Som Carpenter och Franke (2001) påpekar: ”Ett av kännetecknen vid denna övergång från aritmetiskt till algebraiskt tänkande är övergång från proceduriell till relationell syn på likhet, och utveckling av relationell förståelse för likhetstecknets innebörd ligger till grund för förmågan att lägga märke till och representera generaliseringar” (s 156). Här följer fyra förslag:

- Att fokusera på begreppet likhet och skapa aktiviteter där likhetstecknet används kan hjälpa elever när de utvecklar acceptans av ej slutna uttryck (ALC). Ett mycket viktigt första steg är att låta elever möta utsagor med likhetstecken och ta reda på hur de tolkar dessa uttryck. De behöver också vänja sig vid att fler än ett tal kan finnas till höger om likhetstecknet. En enkel uppgift att börja med är att be eleverna komma på så många svar på $7 = \_\_\_$ som de kan. Denna typ av utsaga är också viktig eftersom den kan få eleverna att inse att likhetstecknet kan betyda ”är detsamma som” eller ”har samma värde som”. Det leder eleverna bort från att se likhetstecknet bara som något som anger resultatet av en beräkning.
- Att beskriva och använda aritmetiska relationer. Fråga elever hur de avgör vilket tal som ska skrivas i den tomma rutan i följande exempel: $11 + 16 = 12 + \square$. Om de börjar med att beräkna vänstra sidan till 27, och sedan tänker att de måste hitta ett tal som tillsammans med 12 ger 27, tänker de beräkningsmässigt. Gör talen större så att beräkning blir svårare, t ex $26 + 39 = \square + 35$. Om elever fortfarande löser problemet med beräkning och får fram 30 som det saknade talet, be dem att söka efter ett mönster i den färdiga utsagan: $26 + 39 = 30 + 35$ Är det möjligt att se på talen på respektive sida av likhetstecknet och avgöra varför båda leden ”är lika”? Genom att jämföra 26 och 30, kan eleverna få hjälp att förstå att det första talet till höger om likhetstecknet har ökats med 4. Därför måste det andra talet till höger om likhetstecknet minskas med 4 för att ge lika stor summa.
- Generalisera lösningar på aritmetiska problem som hjälper elever att utveckla variabelbegreppet på ett enkelt sätt. Lärare på lågstadiet kan uppmana sina elever att gå igenom de olika stegen i Peters metod. Innan de tittar på Peters metod, kan de få frågan hur de skulle lösa de problem som Peter undersökte.
- Ge elever möjlighet att diskutera sina problemlösningsstrategier för att på så sätt belysa grundläggande matematiska processer och idéer. Fortsättningen på additionsproblemen ovan kan vara att låta elever fundera på uttryck som rör subtraktion (eller skillnad/differens) såsom:

  $39 - 15 = 41 - \square$

  $144 - 75 = 141 - \square$

  $104 - 45 = \square - 46$

  Slutligen kan elever undersöka följande ekvationer:

  $54 + 36 = 52 + 39 - \square$

  $92 - 47 = 95 - 44 + \square$

  $746 - 263 + \square = 747$

Fler aktiviteter

Hundrakort

Tabeller eller matriser med tal erbjuder en rad möjligheter till stegvis allt mer avancerade utforskningar av talmönster som leder till generaliserbara numeriska uttryck. De uppgifter som visas nedan, kan presenteras med stigande grad av generalisering och anpassas till barns kunskap och erfarenhet. Uppgiften i Figur 1 består i att utforska summan av talen i en tre×tre-ruta.

Viss tidigare erfarenhet av att beräkna summan av tre tal i följd är en förutsättning. När man ser på summan av tre tal i följd är målet att få eleverna att förstå att summan alltid är tre gånger ”mittentalet”. Det är viktigt att de provar många gånger i olika exempel för att se om mönstret alltid gäller, att kunna förutse svaret utan att behöva summera alla tal, att arbeta bakåt för att sluta sig till vilka tre tal i följd som ger en viss summa samt att förklara varför de tror att detta fungerar.

I Figur 1 finns många sätt att utforska talen ”inne i rutan”. Ett tillvägagångssätt är att reflektera över de tre raderna med tal. Summan av tal i den första raden är $3 \cdot 26$, summan av mittenraden $3 \cdot 36$ och summan av bottenraden $3 \cdot 46$. Om man adderar de tre produkterna får man totalsumman 324, vilket är $9 \cdot 36$. Denna metod kan förfinas ytterligare genom att man visar att respektive summa ökar med 30 för varje rad. Genom att ”ta bort” 30 från $3 \cdot 46$ och ”ge det” till $3 \cdot 26$, skulle det finnas tre grupper med $3 \cdot 36$, dvs $9 \cdot 36$. Alltså är summan av talen i tre×tre-rutan detsamma som 9 gånger ”mittentalet”. En elev adderade diagonalt och fick varje gång 108 och samma resultat när han adderade mittkolumnen respektive mittraden, men oroades av att hans totalsumma blev 432 (som är $4 \cdot 108$). Det diagonala tillvägagångssättet var intressant. Denna metod innebar, vilket andra elever också påpekade, att man räknar ”mittentalet (36) fyra gånger”. Alltså måste totalsumman minskas med $3 \cdot 36$. Ett korrekt resultat var alltså möjligt även här. Elever bör få möjlighet att undersöka andra tre×tre-rutor och få i uppgift att skapa en sådan där endast summan av de nio talen är känd. Vad händer om man använder en fem×fem-ruta? Behovet att generalisera ett talmönster blir allt mer uppenbart i Figur 2, där eleverna bara får mittentalet i en tre×tre-ruta, (i figurens hundraruta) och uppmanas att sluta sig till de övriga talen och summan av alla nio talen.

→

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

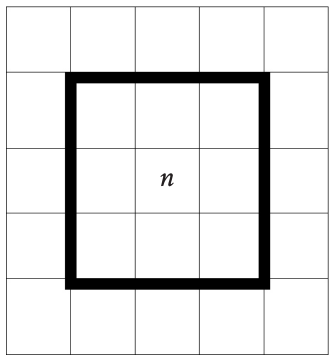
Figur 1

				45					

Figur 2

Användning av olika mittental kräver att elever uppmärksammar de strukturella regler som genererar samtliga nio tal. På detta vis kan samma uppgift anpassas till olika elevgrupper. I alla dessa fall, förutsätts det att en tre×tre-ruta är en del av ett ofullständigt hundrakort. Figur 3 ger eleverna en mer abstrakt generaliseringsnivå där de får ett okänt tal *n* i mitten och uppmanas att hitta de övriga talen och summan av dem.

Elever kan också undersöka vad som händer om tre×tre-rutan inte är en del av ett hundrakort. De kan, till exempel, undersöka summan av talen i en tre×tre-matris som är del av ett månadsblad i almanackan (Milton, 2002).



Figur 3

En geometrisk illustration

Aritmetik och geometri kan kombineras och ge tydliga illustrationer av generaliserbara numeriska uttryck. Triangeltalen nedan har ”dubblerats” för att ge en rektangel. En relation mellan rektangelns bas och höjd ger motsvarande triangeltal. Denna regel kan uttryckas algebraiskt.

Första triangeltalet

→

Andra triangeltalet

$3+3=6$

$2 \times 3=6$

$3=(2 \times 3) \div 2$

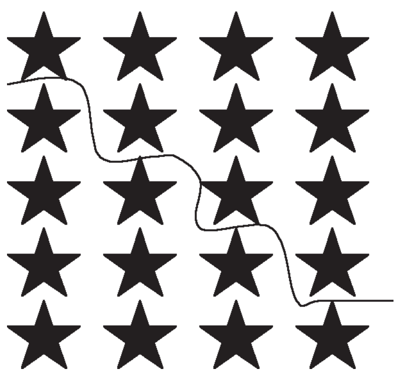
Tredje triangeltalet

$6+6=12$

$3 \times 4=12$

$6=(3 \times 4) \div 2$

Fjärde triangeltalet



$10+10=20$

$4 \times 5=20$

$10=(4 \times 5) \div 2$

Kan elever från ovanstående generalisera till att det femte triangeltalet 15 kan skrivas $(5 \cdot 6) \div 2$? Detta tänkande är beroende av att de ser ett geometriskt mönster som kan generaliseras på samma sätt. Detta mönster blir synligt när en rektangel bildas av respektive triangeltal, jfr figur. Innan dess är mönstret ”osynligt”. Triangeltalets ordning ger rektangelns bredd. Rektangelns höjd är alltid ett mer än dess bredd. Som en utveckling av detta resonemang kan n:te triangeltalet beskrivas som $n \cdot (n+1) \div 2$.

Slutsatser

Blanton och Kaput (2001) uppmanar lärare, i synnerhet på tidigare stadier, att utveckla ”algebraiska ögon och öron” (s 91) för att se och utnyttja olika möjligheter. Detta är ingen lätt uppgift när vårt synsätt så länge begränsats till att se aritmetik i huvudsak som räkning. I grundläggande matematikundervisning i 2000-talets skola krävs att lärare och elever utforskar aritmetikens inbyggda algebraiska natur. Detta kan ge en bättre övergång till senare skolårs algebra och dessutom stärka barns förståelse för grundläggande aritmetik. Varje reform av räkneundervisningen i tidiga skolår måste ta fasta på dessa två mål.

Referenser

Blanton, M. & Kaput, J. J. (2001). Algebraifying the elementary mathematics experience part II: transforming practice on a district-wide scale. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (s 87 – 95). Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T. P. & Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (s 155 – 162). Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T. P. & Levi, L. (1999). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades.* Paper presenterat vid the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Collis, K. (1975). *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint.* Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research.

Fujii, T. & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (s 258 – 264). Melbourne: University of Melbourne.

Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol. Educational studies in mathematics*, *12*, 317 – 326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. Grouws (Red), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s 390 – 419). New York: Macmillan.

Matz, M. (1982). Towards a process model for school algebra errors. I D. Sleeman & J. S. Browne (Red), *Intelligent tutoring systems* (s 25 – 50). New York: Academic Press.

Milton, K. (2002). *Number patterns leading to algebra. Materials prepared for the Success in Numeracy Education (SINE) Years 5 to 8 Pilot Program.* Melbourne: Catholic Education Commission of Victoria.

Radford, L. (1996). The role of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. I N.Bednarz, C.Kieran & L. Lee (Red), *Approaches to algebra*, (s 39 – 53). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Att undersöka barns geometrikunskaper

ERICH WITTMAN

Epokgörande forskning kring barns utveckling av spatialt tänkande genomfördes av Geneveskolan under 1940-talet. Den speglade tydligt geometrins matematiska struktur så som den uppfattades av gruppen vid denna tid och följde ”matematiska strukturers arkitektur” enligt Bourbaki[1]. Sedan sjuttiotalet, när den nya matematiken, ”the New Math” med skolmatematik i Bourbakiversion, misslyckades, har länken mellan psykologisk forskning och matematikens kunskapsteori alltmer förlorats. Denna artikel är ett försök att återknyta sambandet mellan denna forskning och matematiska strukturer, åtminstone när det gäller elementär skolgeometri.

Eftersom forskning i det tyska projektet Mathe 2000 baseras på den kunskapsteoretiska strukturen i elementär matematik finns stort behov av studier av barns tänkande enligt denna struktur. För aritmetik finns omfattande arbeten om barns taluppfattning som ger tillräcklig grund för att utforma inlärningssituationer. När det gäller kursplaneanknuten kunskap om barns geometrikompetens är det mycket sämre. För att samla nödvändig information har därför ett test utvecklats, som är direkt relaterat till grundläggande idéer i elementär geometri. I det följande ges en beskrivning av detta test och empiriska belägg för nybörjares geometrikunskaper. För att visa hur grundläggande idéer kan användas för att utforma en välstrukturerad kursplan följer i slutet en sekvens av lärandemiljöer kring modellering.

Grundläggande begrepp i elementär geometri

Den huvudsakliga källan för utvecklingsarbetet inom Mathe 2000 har varit Hans Freudenthals arbete. I artiklarna ”Was ist Mathematik und welchen Bildungswert kann sie haben?” (Freudenthal, 1963) och ”Geometry between the devil and the deep sea” (Freudenthal, 1971) utmanade han dogmatiska synsätt på matematisk stringens och förordade att geometri skulle läras ut ”på samma sätt

[1] Nicolas Bourbaki är pseudonym för en inflytelserik grupp franska matematiker som började skriva ett verk som betonade matematikens inre enhetlighet och sammanhang på 1930-talet. Deras arbete kom att ha stor påverkan på hur matematiken kom att presenteras, se t ex Dieudonne, Mathematics: The Music of Reason.

som simning". Freudenthals förhållningssätt, som senare fick en kunskapsteoretisk grundval, utformades mycket snabbt inom ramen för Wiskobasprojektet som genomfördes under hans ledning, se Freudenthal (1983). På kort tid utvecklades det till "Realistic Mathematics Education" (RME), som idag är känd världen över. Kännetecknande för RME har varit konkretisering av didaktiska idéer i substantiella inlärningsmiljöer (substantial learning environments, SLE). En inlärningsmiljö kallas substantiell om den uppfyller följande krav (Wittman, 2001):

1 Den representerar centrala mål, innehåll och matematiska undervisningsprinciper på en bestämd nivå.

2 Den är relaterad till viktigt matematikinnehåll, processer och procedurer bortom denna nivå och är en rik källa för matematiska aktiviteter.

3 Den är flexibel och kan anpassas till den specifika klassrumssituationen.

4 Den integrerar matematiska, psykologiska och pedagogiska aspekter i matematikundervisningen och utgör därför ett rikt fält för empirisk forskning.

"Substance" syftar främst på den kunskapsteoretiska rikedomen i det aktuella ämnet, där "rikedom" även innefattar innehåll i de problem eleverna ska utforska. För att få till stånd denna rikedom i matematikundervisningen räcker det inte att analysera olika områden inom elementär matematik endast från matematisk synvinkel. Lika viktiga är kursplanetraditioner, tillämpningar inom olika samhällsområden, den elementära matematikens historia, det matematiska tänkandets psykologi och erfarenheter i klassrummet. Alla dessa områden måste studeras mot bakgrund av allmänna utbildningsplaner.

Den stomme som är nödvändig för att få sammanhang i SLE får man bäst med hjälp av kommenterade listor över "grundläggande idéer". I RME har följande lista använts (de Moor, 1991): iakttagande och planering, orientering och lokalisering, spatiala resonemang, transformering, mätning och beräkning.

I Mathe 2000 valdes en liknande utgångspunkt, men med tillägget att tysk tradition togs med som underlag. I synnerhet påverkades Mathe 2000 av det epokgörande arbetet av "den tyske Freudenthal", Heinrich Winter. Det gav både teoretiska grunder för matematikundervisningen och mycket kreativa SLE för alla nivåer. Ett särdrag i Winters arbete är hans starka betoning av komplementaritet i matematiska strukturer och tillämpningar. Hans grundläggande skrift om generella mål i matematikundervisning har spelat en avgörande roll för denna artikel. De mål han formulerat innefattar de avgörande inslagen i en matematisk process: matematisering, utforskning, resonemang och formulering (Winter, 1975).

En annan viktig referens för Mathe 2000 är den "operativa principen", ursprungligen myntad av Arnold Fricke 1955 och vidareutvecklad av många andra, se t ex Wittman (1993). I grunden är den operativa principen ett kunskapsteoretiskt program: Inom alla matematikområden har vi "objekt" (som är konstruerade på olika sätt), "operationer" (genom vilka objekten kan omvandlas och "effekter" av operationerna på egenskaper och relationerna mellan dem. Kunskapen om dessa effekter möjliggör "operativa bevis" av satser innan man kommer till den formella nivån.

Listan på grundläggande begrepp på vilka projektets kursplan i geometri baseras, speglar komplementaritet mellan den rena och den tillämpade aspekten av geometri liksom den operativa principen, se nedan.

För de tidigare skolåren har ett läromedel utarbetats, "Das Zahlenbuch" (Wittman & Müller, 2003), med utgångspunkt från en komplett studieplan baserad på dessa grundläggande idéer. Från årskurs till årskurs återkommer idéerna i allt mer komplexa inlärningssituationer. Ett exempel ges i slutet av kapitlet.

Grundläggande idéer i geometri

1 **Geometriska former och deras konstruktion**
I det tredimensionella rummet finns en mängd former i olika dimensioner: Punkter, linjer, ytor och kroppar. Geometriska former kan konstrueras och definieras på olika sätt. Genom konstruktionen får formerna vissa egenskaper. Utgående från grundläggande former kan mer komplexa former skapas.

2 **Operationer med former**
Former kan transformeras på olika sätt: parallellförflyttas, roteras, reflekteras, förstoras, förminskas, projiceras, klippas, utvidgas, delas upp, sättas ihop, tvärsnittas.
Vid operationer med former är det alltid intressant att fråga sig vilka relationer som uppkommer, vilka egenskaper som förblir invarianta och vilka som förändras på ett systematiskt sätt. Med ett lämpligt program är det möjligt att rita och experimentera med figurer och studera hur de "uppför sig" på datorskärmen.

3 **Koordinater**
Med hjälp av koordinatsystem på linjer, ytor och i rymdobjekt kan transformationer beskrivas med hjälp av tal och ekvationer. Geometri sätts in i ett algebraiskt sammanhang.

4 **Mätning**
Längd, area, volym och vinklar kan mätas och numeriska relationer mellan måtten kan uttryckas med hjälp av formler, speciellt för area och volym, liksom med trigonometriska formler.

5 **Geometriska mönster**
Det finns ett oändligt antal sätt att etablera relationer mellan geometriska objekt så att det uppstår geometriska mönster och strukturer, som systematiskt studeras i teorier som euklidisk geometri, kombinatorisk geometri, grafteori, projektiv geometri osv.

6 Geometriska former i omgivningen
Verkliga föremål och fysiska operationer med dessa kan beskrivas med hjälp av geometrins begrepp. Teknologin utvecklar procedurer för att tillverka former som ska svara mot bestämda ändamål. Inom konsten används former som uttrycksmedel.

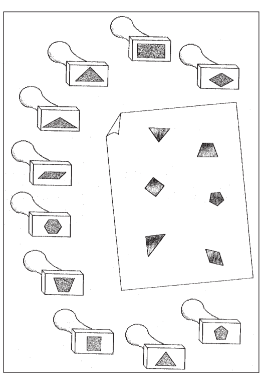
7 Modellering med geometri
Problem som rör rummet och abstrakta relationer kan modelleras och lösas med hjälp av geometri. Här spelar beskrivande geometri en viktig roll, och tillämpningar av denna underlättas numera mycket genom datorgrafik.

G-testet

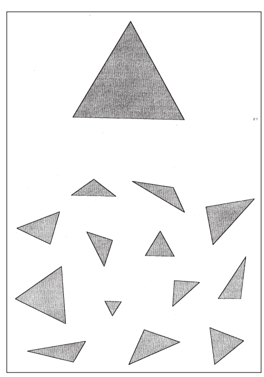
För att få underlag för planering av inlärningsmiljöer utvecklades ett test, ”G-testet i geometri”, bestående av 16 uppgifter, med utgångspunkt från grundläggande idéer i elementär geometri. ”G” kommer från det tyska ordet ”Grundideen”, grundläggande begrepp. Testets utformning är en anpassning av MORE-testet som utvecklades och användes av Marja van der Heuvel-Panhuizen för att utvärdera nybörjares aritmetiska kompetenser. Uppgifterna relateras till de grundläggande idéerna i ovanstående sammanställning på följande sätt:

Idé 1

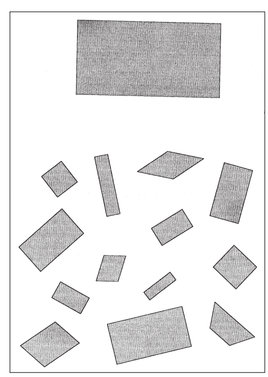
Ark 1, Stämplar, visar sex olika former och tio gummistämplar. Barnen ska förbinda varje form med den stämpel som användes för att trycka den. Ark 7, Likformiga trianglar, visar en stor liksidig triangel och ett antal mindre trianglar. Barnen ska ringa in de små trianglarna som liknar den stora. Ark 8, Likformiga rektanglar, presenterar samma uppgift för rektanglar.



Ark 1



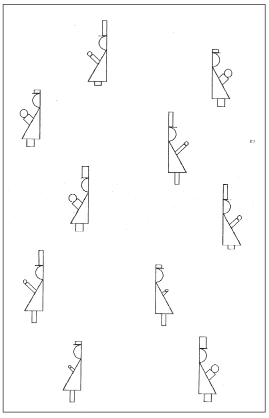
Ark 7



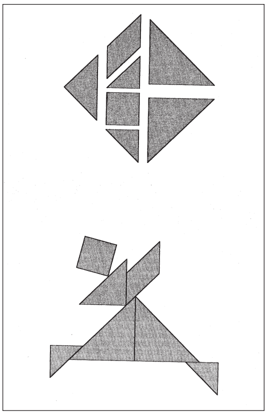
Ark 8

Idé 2

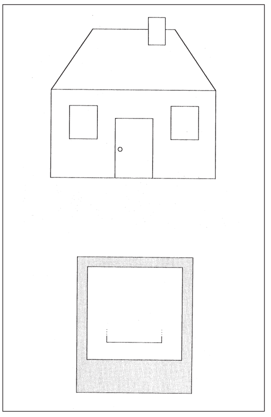
Ark 3, Spegelbilder, visar halvor av olika små gubbar. Barnen ska koppla samman två halvor som ”hör ihop”. Ark 4, Tangram, visar materialets sju former och en figur som är gjord av dessa former. Barnen ska koppla ihop motsvarande former. Ark 9, Hus, visar en ritning av ett hus samt en kamerabild. Barnen uppmanas att rita huset så som det skulle se ut på fotografiet.



Ark 3



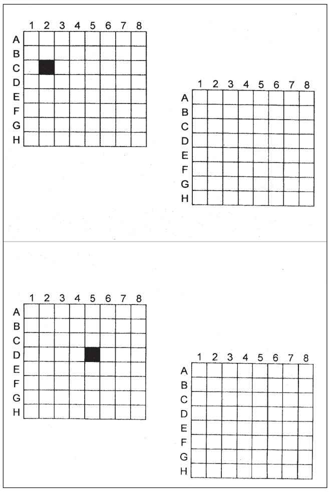
Ark 4



Ark 9

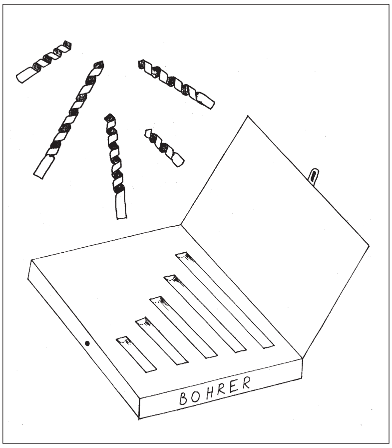
Idé 3

På ark 5, Koordinater, ser vi två rutnät med 8×8 rutor med vissa rutor markerade. Uppgiften är att färglägga ”samma” ruta i det tomma rutnätet.

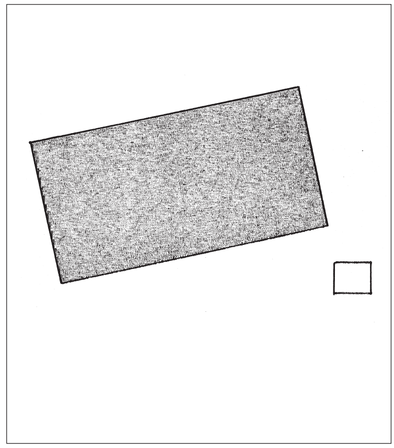


Idé 4

De fem borren på ark 2, Borrar, ska placeras i lådan så att storleken stämmer. På ark 12, Mätning, ska rektangelns långsida mätas med hjälp av en linjal.



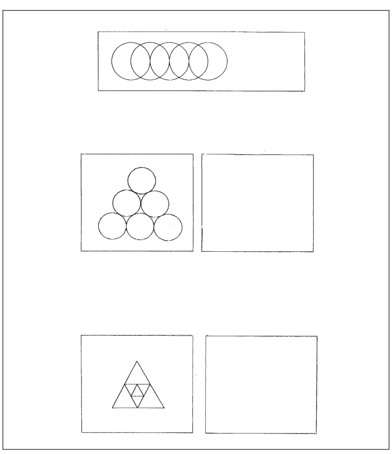
Ark 2



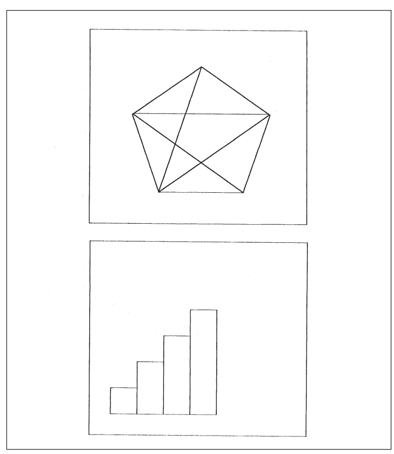
Ark 12

Idé 5

Ark 10, mönster 1,2 och 3, och ark 11, mönster 4 och 5, innehåller geometriska mönster som ska slutföras eller fortsättas.



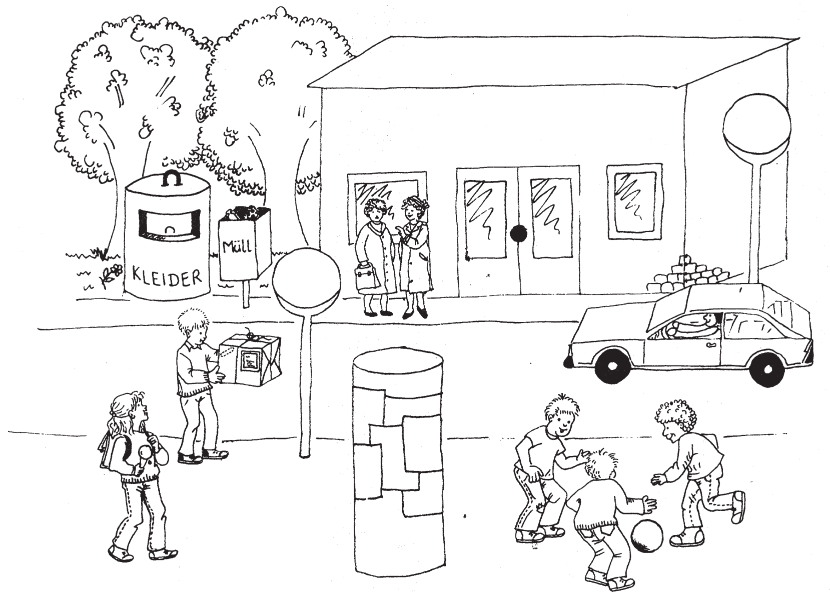
Ark 10



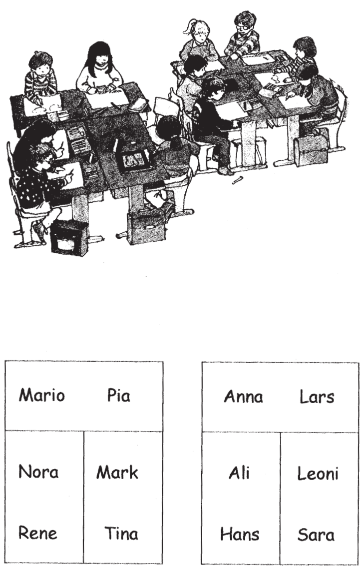
Ark 11

Idé 6

Ark 13 visar geometriska former i omgivningen. Barnen får se modeller av en gul boll, en blå cylinder och ett rött rätblock. Deras uppgift är att färglägga formerna på bilden i samma färg som modellerna.



Idé 7



På ark 6, Ritning, ser vi situationen i ett klassrum och därunder en ritning som visar hur barnen är placerade. Barnen uppmanas att hitta den tomma stolen och ringa in det frånvarande barnets namn.

Arkens ordningsföljd bestäms av uppgifternas natur: Barn uppmanas att dra linjer på ark 1, 2, 3, och 4, att färglägga en kvadrat på ark 5 och att ringa in något på ark 6, 7 och 8. Dessa uppgifter är slutna. På ark 9, 10 och 11 ska barnen rita något, öppna uppgifter. När det gäller ark 12 och 13 behövs extramateriel (linjal, modeller av former). Dessa kan fånga barnens uppmärksamhet så att de inte går vidare till nya uppgifter och måste komma i slutet.

Testet kan genomföras som individuella intervjuer. Denna forskningsmetod är tidskrävande men gör det möjligt att utforska barnens tänkande på ett djupare plan. Liksom Marja van den Heuvels MORE-test, kan det också användas som ett skriftligt test och genomföras med flera barn samtidigt. Man måste dock i förväg visa barnen hur de ska binda samman, färglägga och ringa in föremål. De måste också uppmuntras att rita figurer när det behövs. Tillvägagångssätten kan och bör naturligtvis kombineras, eftersom ett skriftligt test aldrig kan visa barnets fulla potential. De tekniska kraven för att kunna svara är lika låga som på MORE-testet, så det kan ges till nybörjare i skolan.

Nybörjares kunskaper i geometri

G-testet i geometri användes i en pilotstudie för att få en översikt över vilka geometriska kunskaper barnen har när de börjar skolan (Waldow & Wittman, 2001). 83 förstaklassare (40 pojkar, 43 flickor) från fyra olika klasser i Dortmundområdet intervjuades vid skolstarten.

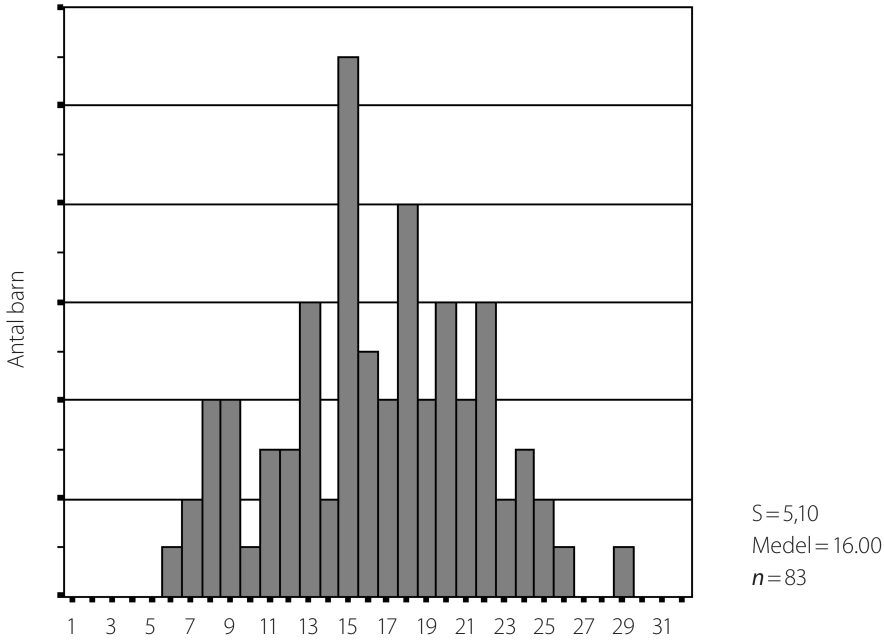
Två klasser (36 barn) kom från en landsbygdsskola, en klass (23 barn) från ett förortsområde och en klass (24 barn, varav 17 invandrarbarn) från ett innerstadsområde. Barnen var i sexårsåldern, den ålder då tyska barn börjar skolan. Testarken samlades ihop till ett häfte. Vid ett tillfälle slutförde fyra barn samtliga uppgifter. Tidsåtgången för de kompletterande intervjuerna varierade från 24 till 42 minuter. Alla barnen var mycket intresserade. Videofilmen visar att koncentrationen endast obetydligt minskade efter hand.

Alla intervjuer videofilmades. De analyserades enligt följande bedömningsmall: Ett korrekt svar gav 2 poäng, ett svar som var nästan korrekt 1 poäng (t ex för 5 fem korrekta stämplar i stället för sex på ark 1). Högsta möjliga poängtal var alltså $16 \times 2 = 32$. Denna grova mall användes av praktiska skäl. I geometriska uppgifter, i synnerhet i dem som har öppna svar, är det knappast möjligt att göra en detaljerad jämförelse av barnens svar.

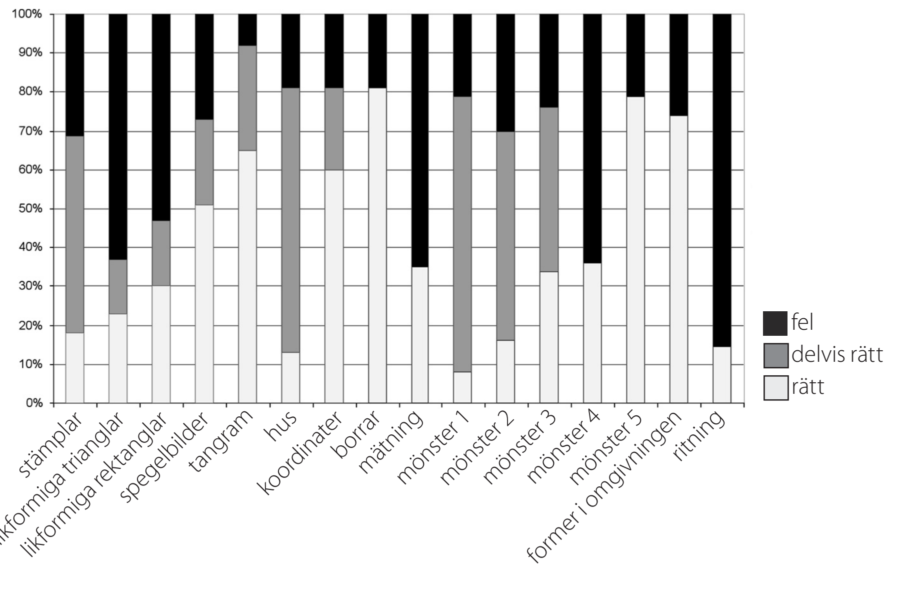
Figur 1 visar fördelningen av de poäng barnen uppnådde (medeltal: 16, standardavvikelse: 5,10). Den högsta poängen var 29 och den lägsta 6.

Figur 2 visar andelen korrekta, delvis korrekta och felaktiga svar för var och en av de 16 uppgifterna. Andelen korrekta svar varierade från 82% (”borrar”) till 8% (”mönster 1”).

Andelen ”felaktiga svar” varierade från 8% (”tangram”) till 85% (”ritning”). Av de svar som bedömdes som ”felaktiga” fanns dock många som i och för sig var rimliga. Ett barn bokförde till exempel resultatet av längdmätningen i ark 12 som ”412 cm”. Hon hade använt sin linjal från 4 cm till 12 cm i stället för från 0 cm till 8 cm.



Figur 1. *Barns resultat (max 32 poäng)*



Figur 2. *Riktiga, delvis riktiga och felaktiga svar i procent*

Barnen från landsbygdsskolorna uppvisade bättre geometriska förmågor än barnen från förortsskolan. En möjlig förklaring kan vara att landsbygdsbarn har fler tillfällen att göra spatiala erfarenheter. Barnen från innerstadsskolan hade sämre resultat än de tre andra grupperna. Detta beror säkert på de icke tysktalande invandrarbarnens speciella situation. De flesta uppgifter visade inga skillnader mellan flickor och pojkar. När det förekom skillnader, som t ex på ark 10 och 11, var de alltid till flickornas fördel.

Diskussion

G-testet i geometri är svårt för nybörjare. Den bedömningsmall som används kan inte visa barnens hela förmåga utan endast deras lägsta nivå. Mot denna bakgrund är testresultaten förvånansvärt goda. I allmänhet är barnen ganska väl rustade för att börja studera grundläggande begrepp i elementär geometri. Det finns dock mycket stora individuella skillnader. Ett barn kunde t ex inte forma en bit lera till en kula. Låga testresultat för vissa elever ska inte tolkas som ett skäl att skjuta upp geometri till ett senare stadium. Det ska snarare ses som en signal att erbjuda barnen aktiviteter med anknytning till den elementära geometrins grundläggande begrepp under förskoleåren. Därför beslöts att i Mathe 2000 utveckla ett häfte med geometriaktiviteter för förskolebarn som komplement till redan befintligt material med aktiviteter kring taluppfattning. Häftet innehåller inte bara arbete med plan och spatiala former, utan även förslag till aktiviter som att forma kulor och att klättra i träd. Inte heller ska de ”svagheter” vi ser i uppgifter om likheter och modellering tolkas som skäl att skjuta upp dessa moment till ett senare stadium. Barn behöver tid på sig för att bemästra svåra innehåll. Därför måste sådana introduceras tidigare, men i lämpliga situationer. Denna rekommendation gjordes redan av Whitehead (1950, s 25):

> It is not true that the easier subjects should precede the harder. On the contrary, some of the hardest must come first because nature so dictates, and because they are essential to life.

Detta sätt att använda testresultaten belyser den holistiska filosofi som präglar Mathe 2000. Att lära matematik ses inte som att lära sig bemästra moment för moment på ett kumulativt sätt, utan att bättre och bättre, bemästra komplexa begrepp och processer på ett holistiskt sätt. Denna process kan naturligtvis stödjas av utvecklade inlärningsmiljöer. De svårigheter som barnen möter när de arbetar med olika uppgifter ger värdefull information om hur man ska förändra undervisning och lärande. För utvecklingsarbetet inom Mathe 2000 har just detta ändamål med G-testet varit av avgörande betydelse.

Slutsatser

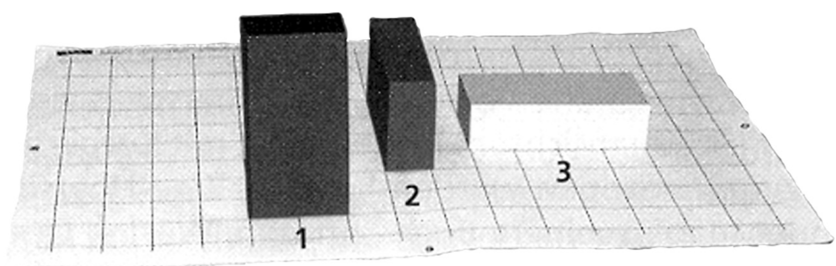
Utgående från erfarenheter från detta pilotprojekt genomförs revideringar av G-testet i geometri. Några uppgifter kommer att strykas, t ex Tangram, andra kommer att modifieras och bedömningsmallen ska förfinas så att kvantitativa analyser möjliggörs.

Ett specialfall av modellering (begrepp 7) är plangeometri. I kursplanen för Mathe 2000 börjar undersökningen av ritningar i årskurs 1 och fortsätter systematiskt genom de följande årskurserna, se (Wittman & Müller, 2003; 2004). En typisk inlärningsmiljö för årskurs 3 och 4 är spelet ”Se och Bygg”, som syftar till att barnen ska bli bekanta med grundläggande element i beskrivande geometri (vy uppifrån, vy från sidan).

Se och Bygg

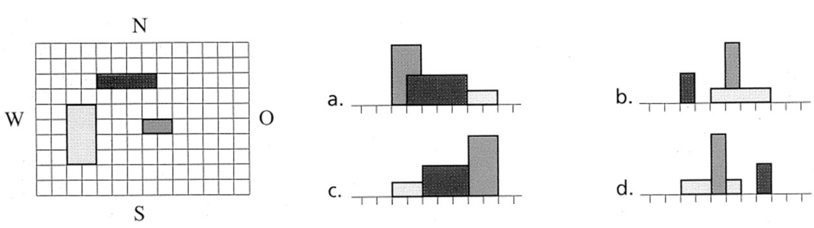
Spelet består av

- Ett rutnät (kvadrater om 2,5 × 2,5 cm) som representerar en byggplats eller markplan på vilket de fyra väderstrecken norr, öster, väster, och söder är markerade.
- 3 byggnader (klossar om 2,5 cm × 5 cm × 10 cm, röd, blå och gul) som kan placeras på rutnätet liggande, stående eller liggande på sidan, se figur 3.



Figur 3

- Uppsättningar av problemkort. Varje uppsättning innehåller fem kort som visar byggnaderna sedda uppifrån och från olika håll, från norr, öster, väster och söder, se figur 4. I några uppsättningar anges väderstrecken, i andra inte.



Figur 4. *Vilken bild stämmer med vilket väderstreck?*

→

”Se och Bygg” är ett spel för fyra barn som sitter runt ett bord med byggplatsen. Varje barn ansvarar för ett väderstreck.

Följande aktiviteter är möjliga, och de markeras med olika färg på problemkorten.

Aktivitet 1: Kombinera bilder från sidan med en given bild uppifrån

De fyra barnen placerar de tre byggnaderna enligt bilden uppifrån. Därefter delas korten med bilder från sidan ut, utan angivelse av väderstreck. Varje barn jämför sin vy med kortet. Korten går runt tills alla vyer stämmer.

Aktivitet 2: Placera byggnader

Bilden uppifrån vänds upp och ned. Korten med bilder från sidan delas ut till respektive väderstreck. De fyra barnen ska nu placera de tre byggnaderna enbart med hjälp av bilderna från sidan.

Eftersom varje bild från sidan bara innehåller delar av den nödvändiga informationen kan ingen ensam lösa problemet, utan barnen måste samarbeta. Som regel får den första placeringen revideras flera gånger. Till en början tar det tid, men barnen lär sig snabbt hur de ska samordna sina aktiviteter. Bilden uppifrån används sedan för att kontrollera resultatet.

Aktivitet 3: Koordinera bild uppifrån med bilder från olika sidor

De fem korten i dessa uppsättningar visar inga väderstreck. Ett barn väljer en bild med vy från sidan och behåller det under lösningsprocessen. Därefter vrids kortet med bild uppifrån tills det stämmer med den aktuella bilden från sidan. Slutligen ska de tre andra barnen välja korrekt sidovy-kort. Även detta problem kräver mycket samarbete.

Aktivitet 4: Koordinera olika sidor utan bilden uppifrån

Varje uppsättning består av fem kort utan angivelse av väderstreck. Kortet med bilden uppifrån vänds upp och ned och används för att kontrollera resultatet. Ett barn väljer en bild med vy från sidan och placerar det så att de tre andra barnen kan se det. De tre återstående korten delas ut bland dessa som måste förhandla om vilket kort som stämmer med vilket väderstreck.

Att använda ”Se och Bygg” i klassrummet är mycket enkelt. Varje uppsättning problemkort förvaras i separata kuvert, och alla uppsättningar förvaras i en låda. Eftersom uppsättningarna är numrerade uppstår ingen förvirring. Allt läraren behöver göra är att introducera grundläggande begrepp (vy uppifrån, vy från sidan) och de olika aktiviteterna. Barnen kan sedan arbeta med materialet på egen hand: Varje grupp tar upp ett kuvert med en uppsättning kort, löser det aktuella problemet, lägger tillbaka korten i kuvertet, lämnar tillbaka detta och tar nästa kuvert.

Martina Röhr undersökte de sociala processer som spelet lockade fram och kunde rapportera en fantastisk respons från lärarna (Röhr, 1995). En andra del av "Se och Bygg" utformades av Ueli Hirt och Sandra Meister för de följande årskurserna (Hirt & Meister, 2002). Dessa schweiziska matematikutbildare använder Soma-kuben i stället för rektangulära klossar och föreslår ett stort antal olika problem (http://www.mathematische-basteleien.de/somacube.htm).

Referenser

Freudenthal, H. (1963). Was ist Mathematik und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht*, *9*(4), 5–19.

Freudenthal, H. (1971). Geometri between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 413–435.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press.

Hirt, U. & Meister, S. (2002). *Schauen und Bauen. Teil 2: Spiele mit dem Soma-Würfel*. Seelze: Kallmeyer.

Moor, E. de (1991). Geometry instruction in the Netherlands (ages 4–14) – the realistic approach. I L. Streefland (Red), *Realistic mathematics education in primary school* (s 119–138). Utrecht: CD-ß Press.

Röhr, M. (1995). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Braunschweig/Wiesbaden: DUV.

Waldow, N. & Wittmann, E. Ch. (2001). Ein Blick auf die geometrischen Vorkenntnisse von Schulanfängern mit dem mathe 2000-Geometrie-test. I W. Weiser & B. Wollring (Red), *Beiträge zur didaktik der Mathematik für die Primarstufe: Festschrift für Siegbert Scmidt* (s 247–261). Hamburg: Dr. Kovac.

Whitehead, A.N. (1950). *The aims of education*. London: Bennett.

Winter, H. (1975). Allgemeine lernziele im Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *7*(4), s 106–116.

Wittmann, E. Ch. (1993). Designing teaching: The Pythagorean theorem. I T. J. Cooney (Red), *Mathematics, pedagogy and secondary teacher education* (s 97–165). Portsmouth, NH: Heineman.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systematic process. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 1–20.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2003 & 2004). *Das Zahlenbuch. Mathematik für die Grundtschule*. Vol 1–4.

Att lära om geometriska kroppar

GRAHAM LITTLER & DARINA JIROTKOVÁ

I artikeln redovisar vi delresultat från ett pågående longitudinellt forskningsprojekt som påbörjades 1993. Projektets mål är att undersöka hur känsel och syn (taktil och visuell perception) bidrar när elever skapar sig inre bilder av tredimensionella former. Ett annat mål är att identifiera hur elever tänker när de kommunicerar kring och arbetar med geometriska kroppar. Vi har utgått från ett antal uppgifter som gavs till elever i åldrarna 9–11 år i Tjeckien och Storbritannien. Genom analys av de experiment som genomfördes kunde vi identifiera flera olika mentala processer som barn använder när de löser uppgifterna. Dessa beskrev vi som ”mekanismer” och tillämpade dem på elevernas lösningar.

Vi visar hur våra uppgifter kan användas som diagnosverktyg för att hjälpa lärare att fastställa elevers grad av förståelse av geometriska kroppars egenskaper och även för att i undervisningen utveckla elevernas förståelse av dessa.

Från tidig ålder får barn erfarenhet av tredimensionella former. De utforskar föremål och utnyttjar först känsel med hjälp av fingrar, ibland tår och ofta munnen. Så småningom hjälper synen dem att befästa medvetenheten om en speciell form, t ex när de leker med sitt favoritföremål eller noggrant undersöker något nytt. Dessa undersökningar lär barnet att skilja mellan sträva och släta ytor, plana och välvda, och andra kännetecken som t ex färg. Det förekommer dock inte mycket kommunikation kring dessa kännetecken förutom frågor som ”Vad har det för färg?” Många föräldrar hjälper omedvetet till att utveckla geometriska färdigheter genom att ge sina barn leksaker som byggklossar, lego osv, vilka inte bara bidrar till att utveckla barnens motoriska färdigheter, utan även till att stärka deras medvetenhet om de former de hanterar och att utveckla deras formuppfattning.

När barn bygger saker kan de ställa sig frågor som ”vilken kloss passar här?” eller ”vilken legobit behöver jag för att bygga väggen färdig?” När de gör detta betraktar de kropparna de hanterar som objekt, dvs som *en helhet,* och ser inte på kropparnas kännetecken utom möjligen när det gäller längd för ”att se om den passar”, något de vanligen löser genom att pröva sig fram.

Enligt vår erfarenhet, och efter att ha studerat ett flertal läroböcker, utnyttjas inte barnens tidiga erfarenhet av tredimensionella kroppar fullt ut när barnen börjar skolan. Lärare och läromedelsförfattare föredrar att börja med tvådimensionella former då ”dessa är mycket lättare för barnen att känna igen”. De menar att barnen ska kunna klassificera former som trianglar, kvadrater, rektanglar och cirklar. Vi menar att man härigenom går miste om en stor och viktig möjlighet. Mycket kan göras de första åren i skolan genom att barnen får använda material som byggklossar, tomma förpackningar etc och genom att de får berätta vilka kroppar de har använt eller byggt med och varför. På så vis ges de möjlighet att fortsätta att utveckla sina tredimensionella begrepp.

De tankar och kommentarer som vi framfört ovan bygger på arbete och observationer i många klasser, samt på resultaten av ett pågående projekt som påbörjades 1993 av Jirotková och Hejný (Jirotková, 2001). Det arbetet fortsattes med studier av elever i Tjeckien och Storbritannien av Jirotková och Littler (2002a, 2003b). Forskningens primära mål var att undersöka hur taktil och visuell perception av tredimensionella kroppar bidrar till att bygga upp geometriska bilder och förståelsen av geometriska begrepp. Ursprungligen utvecklades fyra uppgifter för detta ändamål. I tre av uppgifterna låg tonvikten på taktil perception. Det innebar att vi tog bort det vanligtvis dominerande sinnet, nämligen synen (den visuella perceptionen), så att vi kunde se hur känseln (den taktila perceptionen) bidrog till elevens förståelse av tredimensionella former. Den fjärde uppgiften tillät visuell perception. I vår ursprungliga forskning använde vi tygpåsar för att gömma kropparna. Denna metod hade en stor nackdel såtillvida att vi varken kunde se eller videofilma hur eleverna sorterade kropparna enbart med hjälp av känsel. Vi har nu utökat uppgifterna med ytterligare tre. I två av dessa ska eleverna välja en kropp utifrån en beskrivning från en kamrat som bara kunnat känna på kropparna. Den sista är en variant av den fjärde uppgiften där enbart känseln används. Under senare forskning kring de tre sista uppgifterna användes skärmar med hål i som barnen kunde arbeta genom utan att se kropparna. Vi kunde då studera och videofilma vad som hände. Betydelsen av kommunikation i den diagnostiska processen och i undervisningsprocessen (Hejný, 2000, 2003; Sfard, 2002) har betonats i vårt senare arbete med elever (Jirotková & Littler, 2003b).

Våra klassrumsobservationer, i flera länder, tyder på att det under många lektioner i geometri knappast förekommer någon kommunikation mellan lärare och elever, förutom envägskommunikation för att t ex instruera eleverna, eller mellan elever. Lärarna koncentrerar sig i allmänhet på att eleverna ska kunna namnen på de vanligaste tredimensionella kropparna såsom kub, cylinder, sfär och möjligen rätblock. De är nöjda när eleverna använder dessa ord, utan att kontrollera om de förstår dem eller om de känner till kropparnas egenskaper. Innan eleverna gör den geometriska vokabulären till sin (internalisering) använder de ofta vardagligt tal för att beskriva kropparna och deras kännetecken. Till exempel använder de ordet sida både för sidoyta och för kant på en tredimensionell kropp. Även när en internalisering har skett tycker många elever att det är svårt att skilja på dessa.

Vi tror att det i alla sammanhang är så att när en person beskriver en erfarenhet i ord, så uppfattas den på ett djupare sätt, personen tänker mycket mer medvetet på den och på de ord som behövs för att beskriva den. Detsamma gäller när elever ska kommunicera om geometriska objekt. De ser på kropparna på ett nytt sätt. De måste leta efter kännetecken som karaktäriserar kropparna och sedan hitta lämpliga ord för att beskriva dessa kännetecken.

När elever uppfattar en kropp enbart med känseln skickar känselsinnet signaler till hjärnan där det byggs upp en bild av det de känner. Kommunikation är i detta skede avgörande för att utveckla elevens förståelse av formerna och för att läraren ska kunna bedöma vad som rör sig i barnets tankar. Det är därför viktigt att de personer som är involverade i processen förstår varandra. Om elever ger ord eller uttryck olika betydelser kan det leda till missförstånd mellan dem. I vardagliga situationer kan en person ge flera förklaringar ur olika perspektiv för att missförstånd ska undvikas. Som lärare är vi dock inte vana vid att använda gradvis korrigering som strategi inom matematik eftersom matematiska termer har en så precis innebörd.

Verktyg för djupare förståelse av geometriska kroppar

De sju uppgifter vi utvecklade för vår forskning var till en början avsedda för diagnostiska ändamål. Senare fann vi att de även kunde användas som goda undervisningsverktyg för att utveckla elevernas förståelse av geometriska begrepp, deras relationer och struktur.

I sju uppgifter användes sexton kroppar i olika kombinationer:

1 Kub
2 Prisma med kvadratisk bas
3 Stort rektangulärt prisma
4 Litet rektangulärt prisma
5 Rätvinkligt triangulärt prisma
6 Rätvinkligt likbent triangulärt prisma
7 Icke-konvext femhörnigt prisma
8 Sexhörnigt prisma
9 Tetraeder
10 Pyramid med kvadratisk bas
11 Stympad pyramid med rektangulär bas
12 Icke-konvex pyramid med femhörnig bas
13 Sfär
14 Cylinder
15 Kon
16 Stympad kon

Storleken var sådan att eleverna lätt kunde hantera dem och hålla kropparna i handen.

Uppgift 1

Material

Två ogenomskinliga tygpåsar. Påse A innehåller kropp 11. Påse B innehåller kropparna 1, 2, 5, 6, 9–16.

Instruktion

Stoppa ena handen i påse A och känn noggrant på kroppen. Ta nu ut handen och stoppa den i påse B. Försök hitta en kropp med samma form i påse B. Tala om ifall du hittar någon. Innan du tar ut den kropp som du har valt ska du ge mig ett eller flera skäl till varför du tror att det är en likadan, och du ska tala om vad du tycker är intressant med denna kropp.

Kommentar

Vi valde dessa kroppar för att vi ville ha med sådana som hade åtminstone ett kännetecken gemensamt med den gömda kroppen i påse A och därtill kroppar med helt annorlunda kännetecken, som t ex sfär och cylinder.

Uppgift 2

Material

En ogenomskinlig tygpåse som innehåller kropparna 1, 2, 6, 9, 10, 11, 16.

Instruktion

Stoppa ena handen i påsen och välj ut en av kropparna som du tycker skiljer sig från de andra. Innan du tar ut den kropp som du har valt ska du tala om varför du tycker att den är annorlunda.

Kommentar

Vi valde färre kroppar för att inte förvirra eleverna. Alla var lätta att skilja från de andra. Det fanns till exempel bara en kropp som kunde kännetecknas som ”rund”. Vi förväntade oss att eleverna skulle välja den stympade konen, men de var tvungna att beskriva dess kännetecken innan de fick se den.

Uppgift 3

Material

En ogenomskinlig påse som innehåller kropparna 1, 4, 5, 6, 7, 9–15.

Instruktion

Du får stoppa båda händerna i påsen. Ordna kropparna i påsen i två grupper så att alla kropparna i en grupp har ett eller flera gemensamma kännetecken som du väljer ut. Kropparna i den andra gruppen ska inte ha detta eller dessa kännetecken. När du har gjort detta, och innan du tar ut de båda grupperna ur påsen ska du tala om för mig vilket eller vilka gemensamma kännetecken grupperna har. Sen kan du ta ut de båda grupperna och kontrollera om du är nöjd med din sortering. Om du inte är nöjd så ändra i grupperna, men tala om för mig varför du gör det.

Kommentar

Det begränsade antalet kroppar vi valde kunde grupperas på många olika sätt. Till exempel fanns det tre kroppar som kunde sägas vara runda, fyra som var spetsiga, fyra som var prismor osv (se sidan 73 för exempel på elevers klassifikation).

Uppgift 4

Ugglespelet

Material

Alla kropparna 1–16 placeras fullt synliga framför två elever.

Instruktion

Spelet spelas av två "spelare" A och B. "Spelaren" kan antingen vara en person eller en grupp. Spelare A uppmanas att välja en kropp utan att spelare B får veta vilken. Vi rekommenderar att man antecknar vilken den valda kroppen är. Spelare B ska nu bestämma vilken den valda kroppen är genom att ställa frågor till spelare A som endast får svara med Ja eller Nej. När spelare B kommit fram till vilken kropp det gäller byter man roller, och vinnare är den elev som kan bestämma vilken kropp det handlar om med minst antal frågor.

Kommentar

Vi har använt Ugglespelet många gånger med olika typer av grupper, både äldre och yngre elever, lärarstuderande vid universitet och aktiva lärare i fortbildningssammanhang. Gruppstorleken har varierat från 2 till 28 deltagare. Lärare har spelat med elev, elev med elev, klass med lärare och klass uppdelad i två lag. Det finns många fördelar med att arbeta med grupper på det här sättet. Barnen lär sig sociala färdigheter genom att tvingas lyssna på varandras argument och att fatta gemensamma beslut. De lär av varandra när det gäller matematik, de måste kommunicera för att kunna lägga fram sina synpunkter och lär sig då matematiska termer av varandra. På liknande sätt har vi använt material som råkat finnas till hands, pentominobrickor, tvådimensionella former skapade av spelare på geo-bräden, bilder av tredimensionella kroppar eller enbart formernas namn. I en svensk skola använde vi de sex geometriska formerna i materielet ”Pattern Blocks” som vanligen används för att skapa mönster (Jirotková & Littler, 2002b, 2003a). Genom att arbeta med konkreta material, symboler och med de geometriska formernas namn kan man stödja barnens begreppsbildningsprocess.

Uppgift 5

Material

Elev A har en komplett uppsättning av kropparna bakom en skärm. Elev B har en kropp, som läraren har valt, bakom sin skärm.

Instruktion

Be elev B att stoppa in händerna genom skärmen och noga känna på kroppen och sedan beskriva den för elev A. Säg till elev A att stoppa in händerna genom skärmen och försöka hitta den kropp som elev B har beskrivit. Eleverna får diskutera uppgiften och elev A får be om mer information om den kropp han/hon söker. De byter roller när elev A har hittat rätt kropp.

Uppgift 6

Material

Eleverna A och B har varsin identisk uppsättning kroppar bakom sina skärmar.

Instruktion

Elev A ska känna på kropparna bakom sin skärm och välja en och sedan beskriva den för elev B. Elev B ska sedan försöka hitta den av kropparna som stämmer med beskrivningen bakom sin skärm. Det enda eleven får säga är ”Jag behöver mer information”.

Uppgift 7

Ugglespelet – med bara känseln

Material

Två elever har varsin komplett uppsättning kroppar bakom sina skärmar.

Instruktion

Elev A väljer en kropp med hjälp av känseln. Elev B ska med känseln bestämma vilken kropp det är genom att ställa frågor till elev A. Frågorna får bara besvaras med *ja* eller *nej*.

Forskningens fokus

Som tidigare framhållits är detta arbete en del av ett långsiktigt projekt, och allt eftersom tiden har gått har vi koncentrerat oss på olika aspekter av analysarbetet. I början koncentrerades analysen på de av barnens ord som kunde ha en geometrisk innebörd. Orden klassificerades, och vi fann alla de möjliga tolkningarna (Jirotková, 2001). Målet var att förstå förhållandet mellan bilderna i elevernas medvetande och det ordförråd de använde i sin kommunikation. Vi ville veta om våra uppgifter kunde stödja barnens språkutveckling och deras förståelse av kropparna. Vi var särskilt uppmärksamma på de viktigaste kännetecknen som eleverna använde för att beskriva en kropp, men på detta stadium i vår forskning fann vi att vi hade otillräckliga belägg från deras kommunikation för att göra en analys, därav tonvikten på just kommunikation i vårt senare arbete. Detta har gjort det möjligt för oss att bättre förstå de elever vi har arbetat med, att kunna skilja mellan när felaktiga ord är resultatet av otillräcklig kunskap eller brist på kommunikativa färdigheter och att kunna avgöra om korrekt användning av geometrisk terminologi förekommer utan korrekt förståelse. Denna erfarenhet har vi använt för att utveckla Ugglespelet som ett undervisningsredskap som kan användas för både barn och lärarstuderande.

Den andra aspekten vi koncentrerade oss på var att klassificera och ge möjliga förklaringar till de sociala fenomen och kognitiva tankeprocesser som förekommer i samband med att uppgifterna löses (Jirotková & Littler, 2002a). Dessa fenomen och processer innefattade

– muntliga beskrivningar av geometriska bilder,
– lärande om nya kroppar genom redan kända kroppar,
– proceduriell och begreppslig perception av geometriska objekt eller situationer,
– relationer mellan två- och tredimensionella objekt,
– hur den aktuella handledaren beskriver de olika kropparnas kännetecken,
– den atmosfär i vilken kommunikationen ägde rum,
– personliga relationer mellan deltagarna och medvetenheten om kommunikativa missförstånd.

I den här artikeln kommer vi att koncentrera oss på resultaten av den tredje aspekten av vårt arbete, nämligen beaktandet av de mentala processer som är involverade vid lösning av uppgifterna. Vi har kallat dessa processer för mekanismer. Vi kommer att beskriva dessa mekanismer och illustrera dem med exempel från vårt arbete med eleverna.

Mekanismer som används vid hantering av kroppar

Motivet att definiera mekanismerna uppstod vid analysen av elevernas svar på uppgifterna, i synnerhet uppgifterna 1 och 3. Analysen gav oss insikt i graden av elevernas förståelse och hjälpte oss att avgöra varje elevs aktuella geometriska utvecklingsnivå. I vår tidiga forskning fann vi det intressant att ett flertal elever misslyckades med att hitta den aktuella kroppen vid sitt första försök att lösa uppgift 1. Vi sökte efter orsaker till detta fenomen. Det var uppenbart att eleverna genom att tvingas att kommunicera mer i detalj om sitt val av kropp i den andra påsen började tänka på kropparna på ett annorlunda sätt. Det var med andra ord så att eleverna utvecklade sin förståelse av kropparna genom att kommunicera om dem. Vår analys resulterade i beskrivningen av den första mekanismen.

Det taktila urvalets mekanism, TUM

Det taktila urvalets mekanism är processen att ur en samling kroppar i påse 2 välja en kropp endast med hjäp av känseln efter att tidigare ha känt på den enda kroppen i påse 1.

Vi fann att det fanns tre typer av denna mekanism, beroende på vilken grad av förståelse av kroppen som eleven hade.

TUM1

> Den aktuella kroppen är helt och hållet ny för eleven som inte har någon erfarenhet av att förmedla taktila bilder till korttidsminnet. Detta innebär i allmänhet att eleven inte har någon erfarenhet av att kommunicera om sådana taktila perceptioner. När en sådan elev genomför uppgift 1 upplever den kroppen som en helhet utan att lägga märke till några av de kännetecken som kroppen har. Vidare vet eleven inte vilka kroppar som finns i påse 2 och därmed inte vilka kännetecken han/hon ska fokusera på. När eleven ska välja en av kropparna i påse 2 försöker han/hon komma ihåg vilka allmänna kännetecken den kropp han/hon känt på hade och som stämmer överens med någon av kropparna i påsen. Om detta inte lyckas försöker eleven erinra sig något utmärkande kännetecken hos den ursprungliga kroppen. När denna procedur upprepas blir elevens perception av denna kropp alltmer precis och fokuserad.

Vi kommenterade tidigare de svårigheter vissa elever hade när de löste uppgift 1, och nedan följer vår analys av en sådan elevs lösning av uppgiften. En tjeckisk pojke skulle hitta den stympade pyramiden i påse 2, men hans första val var prismat med kvadratisk bas. Han var osäker på sitt val, och när han tog ut den ur påsen frågade han ”Är det rätt?” Så kände han på kroppen i påse 1 igen och insåg då att hans första val var felaktigt. Trots detta gjorde han även vid det andra försöket ett felaktigt val genom att välja kuben. Under sitt tredje försök var pojken mycket koncentrerad och lyckades då välja rätt.

Vi förklarar hans misstag genom att tillämpa *TUM1*. När han kände på den enda kroppen i påse 1 lagrades bara en allmän perception i det spatiala korttidsminnet. När han försökte finna samma kropp i påse 2 fann han inga allmänna kännetecken som kunde hjälpa honom att välja rätt kropp. Han försökte erinra sig något utmärkande karaktärsdrag hos kroppen, och han fann då ett som kan karaktäriseras som ”fyrsidighet”. Denna tolkning stöds på två sätt. För det första fanns det bara tre kroppar som skulle kunna karaktäriseras som fyrsidiga. Pojken valde dessa, en efter en. För det andra, när han löste de andra uppgifterna uttryckte han att en kropps dominerande kännetecken enligt honom var dess ”fyrkantighet”. Vid sitt andra val styrdes han av perceptionen av fyra räta vinklar. Detta karaktärsdrag uppfattade han när han på nytt kände efter i påse 1. När han stoppade in handen i påse 2 igen var den första kropp han träffade på med detta karaktärsdrag just kuben, som han då valde utan att jämföra med några andra former. När han tog ut kuben ur påsen gav hans visuella perception honom snabbt information om kubens mått. Han lyckades med uppgiften i sitt tredje försök.

TUM 2

> Den upplevda kroppen är ny för eleven som har en viss erfarenhet av att överföra taktila perceptioner till korttidsminnet. Detta innebär att eleven har viss erfarenhet av att kommunicera om sina taktila perceptioner. Eleven försöker hitta så många utmärkande karaktärsdrag hos kroppen som möjligt och försöker överföra dessa till korttidsminnet. När eleven söker efter kroppen i påse 1 bland kropparna i påse 2 försöker han/hon hitta en som överensstämmer, för varje form i tur och ordning, med de kännetecken de har lagrat i korttidsminnet.

Nedan ges ett exempel på hur en 9-årig brittisk flicka utvecklar sin förståelse från *TUM 1* till *TUM 2* under sitt arbete med uppgiften. U representerar undersökningsledaren och E eleven.

U1.4: *Varför tror du att du har hittat den?*
E1.4: *För att den känns som den första.*
U1.5: *Så vad tycker du är speciellt med den?*
E1.5: *Den var liten. Den hade lika många sidor.*
U1.6: *Hur många?*
E1.6: (En kort paus medan hon kontrollerar kroppen i påse 2) *Sex.*

Lägg märke till att så snart undersökningsledaren frågade henne om hon lagt märke till något speciellt med kroppen erinrade hon sig två kännetecken korrekt från korttidsminnet. Båda orden som hon använder, ”känns” och ”liten”, antyder att flickan till en början uppfattade kroppen som en helhet. Den andra delen av E1.5 var förvånande eftersom den visar att hon inte kände att dessa ord var en tillräckligt precis beskrivning av kroppen för henne. Hon försöker ge en analytisk beskrivning av kroppen. Denna övergång från en uppfattning av kroppen som en helhet till att ha en mer analytisk uppfattning kräver en avsevärd mängd intellektuell energi. Vi tror att detta är skälet till att hon använde felaktig terminologi, sidor i stället för sidoytor, vilket var ovanligt för henne (Pegg & Baker, 1999). E1.5 visar också ett ovanligt sofistikerat matematiskt tänkande för en nioårig flicka.

TUM 3

> Eleven uppfattar kroppen som bekant och har på ett korrekt sätt lagrat den i sitt spatiala långtidsminne.

På denna nivå använder eleven en god bild som han/hon lagrat i minnet för att hitta den aktuella kroppen i påse 2.

Den taktila klassifikationens mekanism, TKM

I uppgift 3, där eleverna ska dela upp kropparna i två grupper genom att känna på dem, förvånades vi av antalet lösningar som presenterades och dessutom av hur elevernas matematiska beteende skilde sig åt. Till att börja med ägnade vi särskild uppmärksamhet åt vilka kännetecken hos de olika kropparna som dominerade hos eleverna när de undersökte dem taktilt (uppgift 3) resp visuellt (uppgift 4). Vi fann att "rundhet" och "spetsighet" dominerade när kropparna uppfattades taktilt, och "kantighet" dominerade för de kroppar som uppfattades visuellt. Vi inser att antalet elever i vårt material inte tillåter oss att generellt dra denna slutsats, men vi uppfattade att detta var signifikant. Dessa observationer i kombination med fortsatt analys hjälpte oss att beskriva den andra mekanismen.

Den taktila klassifikationens mekanism är den process genom vilken elever delar upp en grupp kroppar med känselns hjälp så att åtminstone en av grupperna innehåller kroppar som alla har något gemensamt kännetecken.

I allmänhet är det möjligt att klassificera en sådan undergruppering på ett av två sätt:

Komplementär klassifikation – från den givna uppsättningen kroppar karaktäriseras de utvalda kropparna av egenskapen A. Återstoden av uppsättningen karakteriseras av icke-A. Till exempel kan de utvalda kropparna vara "spetsiga", de övriga inte.

Egenskapsklassifikation – varje grupp ur den givna uppsättningen är klart definierad av en speciell egenskap. Till exempel kan kropparna i den ena gruppen vara "runda" medan kropparna i den andra är "kantiga".

I inlärningsprocessen börjar vi ofta med komplementär klassifikation och det är först senare som vi tillämpar egenskapsklassifikation. Detta gör det möjligt för eleverna att gradvis förstå vissa begrepp ur en större struktur. Ett exempel är klassifikationen av språkets ord i substantiv, verb, adjektiv osv. Om läraren introducerade alla dessa lingvistiska klassifikationer samtidigt skulle det för de flesta elever vara mycket svårt att förstå en så omfattande struktur.

En del elever delade kropparna i två grupper utan att vi lyckades identifiera vilken sorts klassifikation de använt sig av. En pojke som arbetade med uppgift 3 delade upp de fjorton kropparna i en grupp som bestod av den fyrsidiga pyramiden, den femsidiga icke-konvexa pyramiden, konen, den stympade konen, cylindern, sfären och det tresidiga prismat. Återstående kroppar utgjorde den andra gruppen. När han tog ut de båda grupperna av kroppar ur påsen och kunde uppfatta dem visuellt ville han omedelbart placera det tresidiga prismat i den andra gruppen. Vid ett första påseende var det oklart vilken sorts klassifikation han använt sig av. När vi frågade svarade han "De här är spetsiga och de här är som kvadrater eller romber" Det skulle kunna tolkas som att han använde egenskapklassificering, men vidare analys fick oss att tvivla på denna tolkning. Den första gruppen utvalda kroppar innehöll inte endast "spetsiga" kroppar utan även "rundade" sådana. En djupare analys av elevernas tillvägagångssätt och deras muntliga svar gjorde det möjligt att identifiera tre olika typer av den taktila klassifikationens mekanism.

TKM 1

Eleven noterar mentalt den första taktila perceptionen, t ex ”spetsig”, som associeras med vissa geometriska företeelser, t ex pyramiden eller konen, som han/hon kan erinra sig från långtidsminnet. Denna företeelse blir kriteriet för klassifikation. Klassifikationsprocessen börjar med taktil perception och fullföljs genom att man erinrar sig vissa geometriska begrepp från långtidsminnet.

Ett exempel på elevsvar som illustrerar denna mekanism kommer från ett protokoll med den ovannämnda brittiska eleven E. Efter att hon känt på kropparna utspann sig följande diskussion:

U2.4 *OK! Vad är speciellt med den grupp som du har valt ut?*
E2.3 *En grupp har... de har alla åtminstone en sidoyta som är fyrsidig i två dimensioner ... Så har jag sorterat dem.*

I detta skede var undersökningsledaren inte säker på om eleven använde uttrycket ”åtminstone en” av en tillfällighet, så han frågade:

U2.5 *Så alla former i den gruppen har en yta som är fyrsidig?*
E2.4 *ÅTMINSTONE EN!* svarade eleven med eftertryck.

TKM 2

Beslutet om urvalskriterier görs innan någon taktil perception ägt rum och grundar sig på elevens kunskaper om kropparna och hämtas direkt från det spatiala långtidsminnet.

En flicka bestämde till exempel att hon skulle placera alla ”kvadrater” i en grupp. När hon kände på pyramiden med kvadratisk bas uppstod en konfliktsituation då hon insåg att en yta var kvadratisk men inte de andra. Klassifikationskriterierna fick då modifieras för att stämma med den nya situationen.

TKM 3

Eleverna ställer upp kriterier (t ex ”spetsighet”) på grundval av sina inledande taktila upplevelser av kropparna. Efter att ha gjort det första urvalet känner de efter på andra kroppar som delvis uppfyller det första kriteriet (t ex kan den stympade konen uppfattas som att den är på väg mot en spets, dvs att den är delvis ”spetsig”) och denna kropp läggs till den ursprungliga gruppen. En annan kropp som inte uppfyller det ursprungliga kriteriet men har ett viktigt kännetecken gemensamt när eleven känner på den (”rundhet”) leder till att det ursprungliga kriteriet ersätts av ett nytt uppenbarligen starkare kriterium som också baseras på taktil observation.

TKM 3 förklarar varför, i ovanstående lösning av uppgift 3, den fyrsidiga pyramiden, den femsidiga icke-konvexa pyramiden, konen, den stympade konen, cylindern, sfären och det tresidiga prismat kunde placeras i samma grupp. Det tresidiga prismat uppfattades som ”spetsigt” då det gav en vass taktil upplevelse, men den visuella perceptionen tillförde annan information, och därför ville hon flytta det till den andra gruppen.

I *TKM2* kan en förändring av kriterium göras. I *TKM3* sker alltid en förändring beroende på det initiala kriteriets låga stabilitet. Detta måste därför omvandlas till ett annat då båda de kännetecken som kriteriet baseras på finns hos en eller flera av kropparna samtidigt.

Taktil manipulation

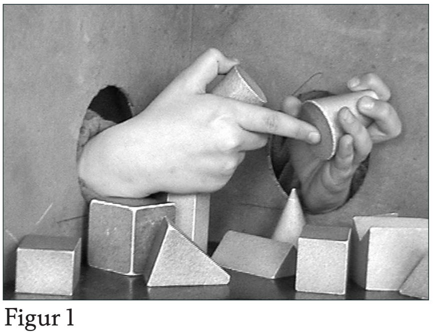
I det arbete vi genomförde under 2003 kunde vi se hur eleverna hanterade formerna medan de gjorde taktila erfarenheter av kropparna. Detta visade sig vara intressant. Elevernas hanterande var tydligt kopplat till deras grad av kommunikation om kropparna. Vi fann senare att elevernas hanterande kunde delas upp i tre olika handlingsmönster, som speglade van Hieles (1996) och Peggs (1997) tre första nivåer som återges nedan så att läsaren kan se hur dessa nivåer motsvarar våra typer av handlingar:

TM1

Eleven höll kroppen i båda händerna för att med hjälp av känseln få en helhetsuppfattning av kroppen. Kroppen roterades i händerna utan försök att fokusera på någon särskild egenskap.

TM2

Eleven höll kroppen i en hand och och undersökte dess egenskaper med andra handens pekfinger (se figur 1). Denna taktila perception av egenskaper gjordes slumpmässigt, dvs eleven kunde vidröra en kant och sedan gå vidare till en yta i stället för att bestämma hur många kanter kroppen hade.



Figur 1

TM3

Eleven höll kroppen i ena handen och undersökte systematiskt med ett av andra handens fingrar vilka egenskaper kroppen hade. I dessa fall kontrollerade eleverna kroppens alla kanter, ibland mer än en gång för att försäkra sig om att de räknat rätt, därefter ytorna, hörnen osv.

Van Hiele (1986) publicerade en teori i vilken han klassificerade fem nivåer av förståelse av tredimensionella geometriska kroppar. Den andra nivån delades senare av Pegg (1997) upp i två undernivåer. Vi anger här de tre nivåer som gäller elever i grundskolans tidigare årskurser.

Nivå 1: Kroppen ses som en helhet och vanligen som en specifik form. Kroppens egenskaper/kännetecken spelar ingen roll för igenkännandet av formen.

Nivå 2 A: Kroppen identifieras genom ett enda kännetecken snarare än genom hela formen.

Nivå 2 B: Kroppen känns igen på flera av dess egenskaper eller kännetecken vilka ses som oberoende av varandra.

Nivå 3: Kroppens egenskaper övervägs logiskt och relationerna mellan dem känns igen.

Exempel

Vi kommer nu att ge några exempel på elevers pararbete med uppgifterna 5 och 6, med bilder av hur de hanterade kropparna. Kopplingen mellan van Hieles nivåer och våra typer av taktil manipulation kommer att identifieras.

Det som följer nedan är utdrag från samtal mellan två 10-åriga brittiska elever som genomförde uppgifterna år 2003. Utdraget visar skillnader mellan elevernas kommunikativa förmågor liksom mellan deras förståelse av kropparna. Skillnaderna återspeglades i deras sätt att hantera kropparna.

A3.1: *Den har fem ytor, har nio kanter, har inga välvda ytor, har triangulära och rektangulära ytor. Vill du veta något mer?*
C3. 1: *Är den stor?*
A3.2: *Nej, den är ganska liten.*
C3.2: *Har den någon spets?*
A3.3: *Du menar om den har den några hörn? Men det har ju de flesta former. Den har sex spetsar, de är hörn. Den har två triangulära ytor och tre rektangulära ytor. Nio kanter, fem ytor.*

Elev A:s hantering av kroppen (nedan i figur 2) är av typen *TM 3*. Hon gav en analytisk beskrivning av den kropp hon hade valt och kände på. När hon hade valt det triangulära prismat räknade hon först ytorna, därefter kanterna, och sedan hörnen. Hon återgick sedan till ytorna, och denna gång kände hon på deras konturer för att bestämma de tvådimensionella formerna. Hon höll kvar kroppen i handen under hela uppgiften och kände hela tiden efter om det fanns något ytterligare kännetecken hon kunde nämna för sin kamrat för att hjälpa henne att känna igen kroppen. Elev A hade känt igen kroppen utan problem, kontrollerat sin taktila perception av dess kännetecken mot sitt långtidsminne, och

Figur 2

hon hade tillräckliga kommunikativa färdigheter och vokabulär för att uttrycka dessa egenskaper på ett otvetydigt sätt för sin kamrat (A3.1).

Dessutom visade hon att hon hade förmåga att genom kommunikation skapa sig en bild av sin kamrats kunskapsstruktur (Jirotková & Littler, 2003b). Det var därför hon nämnde en egenskap som kroppen inte hade – en välvd yta. Efter tidigare kommunikation med elev C var hon medveten om att ”rundhet” var en kropps dominerande egenskap för elev C i hennes taktila perception (till vänster i figur 2).

Elev C:s hantering av kropparna var av typ *TM1*. Hon både handskades med och tänkte på kropparna som helheter vilket framgår av hennes första svar. I sitt andra yttrande har hon valt en mycket distinkt egenskap, ”spetsighet”, vilket är ett bra exempel på nivå 1 av *TKM*, den taktila klassifikationens mekanism. Elev C fann denna egenskap efter att hon länge, mer än en gång, känt på kropparna. Upprepningen innebar ingen kontroll, utan visade i stället hennes avsaknad av strategi i arbetet. Hon lade inte de kroppar hon redan hade inspekterat åt sidan, utan lade tillbaka dem på måfå så att hon ofta på nytt tog upp en kropp som hon redan hade valt bort.

När eleverna bytte roller i uppgift 6 och elev C med känseln valde ut en kropp inleddes deras diskussion på följande sätt:

C4.1: *Har tre ytor. En cirkel på varje sida, saken i mitten är rund.*
A4.1: *En välvd yta?*
C4.2: *Om du har en bit papper och rullar ihop den blir den som ett teleskop. Förstår du nu?*
A4.2: *Jag har två som jag tror att det kan vara, men jag är inte säker (se figur 3)*
C4.3: *Den är likadan i båda ändar.*

Figur 3

Den kropp som elev C försökte beskriva var en cylinder, men uppenbarligen hade hon inte den matematiska vokabulären för en välvd yta. Hon lade stor möda på valet av kropp och kände noga på alla former. Slutligen valde hon en kropp som hon tänkte att hon lätt skulle kunna beskriva. Hon hade känt igen formen och hade troligen formen lagrad som en helhet i sitt spatiala långtidsminne. Hon fastnade dock i sin egen fälla då hon inte hade matematisk vokabulär för en tillräcklig beskrivning av kroppen.

Om vi analyserar de båda elevernas arbete med hjälp av van Hieles teori finner vi att elev A helt klart befinner sig på van Hieles nivå 3 när det gäller förståelse för kroppar. Elev C började på van Hieles nivå ett, men avancerade till nivå 2 A under arbetets gång. Detta överensstämmer med de typer av taktil manipulation eleverna uppvisade.

Slutsatser

Från början var avsikten att uppgifterna skulle användas för att diagnostisera och bedöma elevers nivå då det gäller förståelse av tredimensionella kroppar. Det är fortfarande möjligt. Vi har emellertid dessutom funnit att de har stort värde som undervisningsverktyg för att:

- utveckla elevernas förståelse för geometriska kroppar,
- utveckla elevernas kommunikativa färdigheter så att de kan göra precisa och otvetydiga uttalanden om kroppar och ställa tydliga och precisa frågor.

Användningen av dessa icke-standardiserade matematiska uppgifter gav en tydligare bild av elevernas sätt att tänka än utvärderingar som baserar sig på traditionella former av algoritmiska test (Jirotková & Littler, 2002a,b).

Våra uppgifter krävde att eleverna skulle kunna beskriva sina taktila perceptioner. Detta gav en mycket tydlig indikation på deras kommunikativa färdigheter och nivån på deras vokabulär. Vår analys visade att denna nödvändiga kommunikation hjälpte eleverna att i sitt medvetande koppla samman isolerade kunskapsfragment, som de fått från tidigare erfarenheter, med sin nuvarande erfarenhet så att de fick en mer generaliserad bild av ett visst begrepp (Hejný, 2000; 2003).

Sambandet mellan den typ av taktil hantering eleven använde och deras kommunikationsnivå kring de kroppar de undersökte gjorde det möjligt att både identifiera elevernas svagheter och innebörden av de ord som de använde. Att kunna observera elevernas hantering av kropparna gav även insikter i de strategier de använde för att lösa uppgifterna.

Vi är övertygade om att lärare kan lära sig mycket om sina elevers kognitiva och sociala förmågor genom att noga analysera deras svar. Det kan även bidra till att utveckla lärares känslighet för elevernas reaktioner samt användas för diagnos och för den framtida utvecklingen av deras arbete.

Referenser

Hejný, M. (2000). Creating mathematical structure. I J. Novotna (Red), *Proceedings of CERME 2*. Prague: Charles University.

Hejný, M. (2003). Understanding and structure. I A. Mariotii (Red), *Proceedings of CERME3*. Bellaria, Italy.

Jirotková, D. (2001). *Investigating geometrical understanding*. Doktorsavhandling. Prague: Charles University.

Jirotková, D. & Littler, G. H. (2002a). Investigations of cognitive structures from tactile perceptions of geometrical solids. I A. Cockburn (Red), *Proceedings of PME26*, (Vol 3, s 25–32). Norwich, UK: University of East Anglia.

Jirotková, D. & Littler, G.H. (2002b). Geometri är mer än mönster. *Nämnaren*, *29* (4), 16 – 24.

Jirotková, D. & Littler, G.H. (2003a). Mer om geometri och mönster. *Nämnaren*, *30* (1), 24 – 27.

Jirotková, D. & Littler, G.H. (2003b). Insight into pupils' structures of mathematical thinking through oral communication. I A. Marriotti (Red), *Proceedings of CERME3*. Bellaria, Italy.

Pegg, J. (1997). Broadening the descriptors of van Hiele's level 2 and 3. I F. Biddulph & K. Carr (Red), *The proceedings of the 20th Mathematical Education Research Group of Australia Conference*. Hamilton, NZ: University of Waikato.

Pegg, J. & Baker, P. (1999). An exploration of the interface between van Heile's levels 1 and 2: initial findings. I O. Zaslavsky (Red), *Proceedings of PME23*, (vol 4 s 25 – 32). Haifa University.

Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical thinking. I A. Cockburn (Red), *Proceedings of PME26*. Norwich, UK: University of East Anglia.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

Matematisk modellering

MORTEN BLOMHØJ

Att utveckla kompetenser för att utforma, analysera och kritiskt granska matematiska modeller betraktas vanligen bara som relevant på gymnasienivå och däröver. Den allmänna uppfattningen bland lärare är att modellering förutsätter begreppsförståelse vad gäller den matematik som skall vara involverad. Matematisk modellering kan ses som en undervisningspraktik som sätter fokus på relationen mellan verklighet och matematik i undervisningens och lärandets centrum, och detta är relevant på alla nivåer. Modelleringsaktiviteter kan vara motiverande i inlärningsprocessen och stödja etablering av en kognitiv grund för viktiga matematiska begrepp. Dessutom är nämnda kompetenser i sig utbildningsmål för matematikundervisningen i skolan. I detta kapitel presenterar jag en teoretisk struktur som använts för att utforma kurser i modellering. Det har gällt att analysera elevers modelleringsaktiviteter, att identifiera inlärningssvårigheter i processen och att vägleda lärare i samspel med studerande i arbetet. Strukturen illustreras med exempel från ett utvecklingsprojekt där elever i årskurs 8 arbetat med situationer från verkligheten med anknytning till egna erfarenheter.

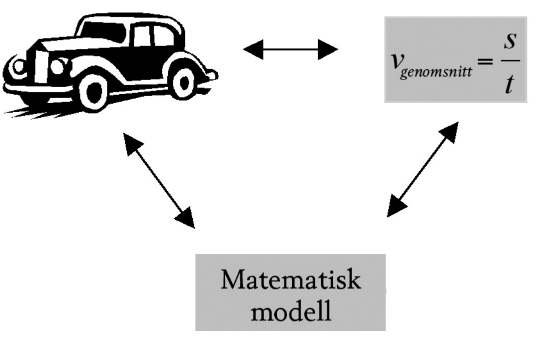
Matematisk modellering som teori

Forskningen i matematikdidaktik har i viss mån underlåtit att utveckla egna paradigmatiska teorier. Teorier lånas ofta från andra vetenskaper och tillämpas inom matematikutbildning, t ex allmänna lärandeteorier från pedagogik eller psykologi. Det är relevant att söka efter områden inom matematikdidaktik, där teorier kan utvecklas genom studier av matematikundervisningens och matematiklärandets processer. Jag menar att matematisk modellering är ett sådant område. En sammanhängande teoretisk förståelse av modellering och tillhörande lärandeprocesser har utvecklats under de senaste 30 åren. Detta har möjliggjorts genom nära samspel mellan kursplaneutveckling, undervisningspraktik och teoretiska reflektioner. I själva verket har vi nu en teori – i betydelsen ett system av sammanhängande idéer – som kan användas för att göra modellering till en väsentlig del i all matematikundervisning och för att analysera, förutsäga och bättre förstå elevers lärandesvårigheter inom området (Blum m fl, 2003). Definitionerna och sätten att förstå begreppen ”matematisk modell” och ”modellering” är väsentliga delar av teorin. Innan jag visar teorins relevans för matematikundervisningens praktik krävs några begreppsliga förtydliganden.

Vad är en matematisk modell?

En matematisk modell är en relation mellan matematiska objekt och dess relationer samt en situation eller ett fenomen av icke-matematisk natur. Denna grundläggande aspekt av modellbegreppet har direkt betydelsefulla didaktiska implikationer. Först och främst implicerar den att närhelst matematik tillämpas på en utommatematisk situation så är en matematisk modell involverad, explicit eller implicit. För det andra är det en kunskapsteoretisk förutsättning för att en elev ska kunna erfara en matematisk modell och kunna reflektera över modellens relation, att han eller hon har förmåga att uppfatta både situationen eller fenomenet som modelleras och den matematik som förekommer som två separata men besläktade objekt. Detta är i själva verket kärnpunkten, både i relation till möjlig potential och till svårigheter som hänger samman med att lära sig matematisk modellering. Följande enkla exempel illustrerar en modells egenskaper och några av dess didaktiska implikationer.

En familj på semester kör 1180 km på 12 timmar. Resans genomsnittshastighet (98 km / h) kan beräknas genom att man dividerar den totala sträckan med tiden för resan. En sådan beräkning kan uppfattas som en matematisk modell. Detta illustreras i figur 1.



Figur 1. *Beräkningen av genomsnittshastigheten för en viss bilresa är en matematisk modell.*

Som modell av resan är genomsnittshastigheten bara en övergripande beskrivning. Den kan uppfattas som en oproblematisk standardmodell. Och det finns naturligtvis ingen anledning att diskutera själva beräkningen. Modellen är dock mer än bara beräkningen av genomsnittshastigheten. Modellen identifierar sträckan som tillryggalagts och den tid som gått åt. Körsträckan som bilen registrerat kan ses som den totala sträckan. Denna inkluderar den omväg som familjen tog för att hitta ett trevligt lunchställe. Sträckan skulle även kunna uppskattas på en karta, och som följd av det skulle tiden bli det faktiska antal timmar man kört. Detta ger upphov till beräkningen 1150 km / 10 h = 115 km / h, vilket är en annan modell av samma situation. Vilken av de två som är mer korrekt eller giltig beror på hur man tänker använda resultaten. Om modellen ska användas i en diskussion om trafiken, eller med tanke på bilförarens sätt att köra med hänsyn till hastighetsbegränsningar, är den andra modellen mer relevant än den första. Om familjen använder modellen för att uppskatta hur långt det är möjligt att köra nästa dag så introducerar de i själva verket en ny modell. Den rent deskriptiva modell som ger en uppskattning av genomsnittshastigheten för en redan avverkad körsträcka förvandlas till en förutsägande modell för att beräkna den förväntade tid det tar att nå en viss destination. Modellen skulle kunna representeras matematiskt som $s(t) = v_f \times t$, där $s(t)$ (km) är den sträcka som avverkats efter t timmars körning och v_f är den förväntade genomsnittshastigheten (km / h).

Beroende på vilken av de båda uppskattningarna som används för v_f kan t tolkas på två olika sätt, nämligen som åkturens totala tid eller den effektiva körtiden. Om 98 km / h – som inkluderar ett tvåtimmars lunchuppehåll – används får det omedelbart konsekvensen att modellen bara är giltig när t är omkring 12 timmar. Om man använder det andra värdet för v_f måste den tid som ägnas åt lunchen läggas till den beräknade faktiska körtiden. Detta för att man ska kunna beräkna hur lång tid som behövs för att nå destinationen.

Den förutsägande modellen är mycket mer komplicerad, kunskapsteoretiskt, än den deskriptiva. Den bygger implicit på ett antal antaganden rörande likheter mellan två olika situationer; den som används för att uppskatta den förväntade genomsnittshastigheten, och situationen för vilken förväntad körtid förutsägs. Förutsägelsen kan bara bekräftas genom det faktiska genomförandet av körningen. Denna sorts modell kan naturligtvis få stöd av erfarenhet (t ex statistisk information).

Redan detta enkla exempel av matematiktillämpning i en vardagssituation, där man gör modellens relationer explicita och diskuterar giltigheten i modellens möjliga tillämpningar, resulterar i noggranna överväganden om relationerna mellan de matematiska begreppen, representationerna och deras innebörd i sammanhanget. Genom att göra modellens relationer synliga möjliggör man dessutom en kritik av modellen och dess möjliga användning.

Modelleringsprocessen

I princip ligger det en modelleringsprocess bakom varje matematisk modell. Detta innebär att någon, explicit eller implicit, gått igenom en process för att etablera en relation mellan en viss matematik och en verklig situation. Med andra ord, för att skapa och använda en matematisk modell är det nödvändigt att genomföra en modelleringsprocess. Analytiskt är det möjligt att beskriva den som bestående av följande sex delprocesser (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003):

a Formulering av en uppgift (mer eller mindre explicit) som ger vägledning för att identifiera kännetecknen hos den uppfattade verklighet som ska modelleras.

b Val av relevanta objekt, relationer etc från det aktuella undersökningsområdet, samt en idealisering av dessa för att möjliggöra en matematisk representation.

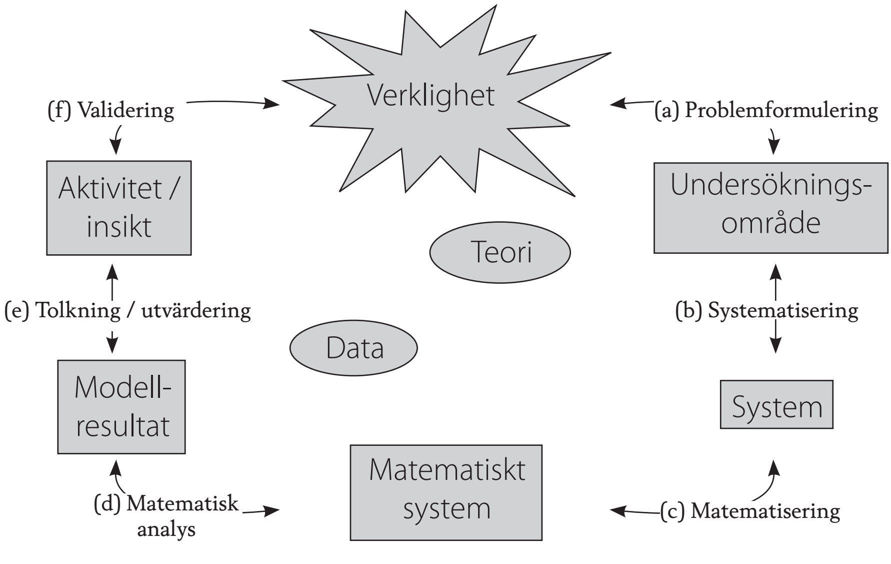
c Översättning av objekt och relationer från ursprungliga representationer till matematik.

d Användning av matematiska metoder för att få matematiska resultat och slutsatser.

e Tolkning av dessa som resultat och slutsatser med hänsyn till undersökningsområdet.

f Utvärdering av modellens giltighet genom jämförelse med data, observerade eller förutspådda, och med kunskap (teoribaserad eller baserad på gemensamma eller personliga erfarenheter).

Modelleringsprocessen bör inte förstås som en linjär process. Som redan antytts i exemplet får den ofta formen av en cyklisk process. Reflektioner över modellen och avsedd användning leder till att man omdefinierar den. Var och en av de sex delprocesserna kan faktiskt leda till förändringar av föregående delar. För att visa på dessa dynamiska aspekter avbildas modelleringsprocessen i ett cirkulärt diagram i figur 2.



Figur 2. *En grafisk modell av en modelleringsprocess.*

Teoretisk kunskap och empiriska data angående undersökningsområdet utgör basen för alla delprocesser. Detta antyds av de båda ellipserna i diagrammets mitt. Det bör betonas att kategorierna data och teori är besläktade och inte helt väldefinierade. ”Teori” betyder här den kunskap om undersökningsområdet som används i modelleringsprocessen. Kunskapsbasen kan ha en mycket annorlunda kunskapsteoretisk status även inom samma process, varierande från välgrundade teorier med inbyggda matematiseringar (som ofta är fallet i fysik) till delad eller personlig erfarenhet och rena ad hoc-antaganden.

Karaktären hos denna kunskapsbas har en avgörande betydelse för hur modellen och dess möjliga tillämpningar kan valideras. Ibland existerar ”data” före modelleringsprocessen och då kan dessa ”data” användas som stöd i systematisering och matematisering och slutligen också som bas för att validera modellen. Oftare är det emellertid så att relevanta data måste insamlas som en del av modelleringsprocessen. Sådana data kan användas för att uppskatta modellens parametrar men inte som bas för att validera modellen. Att utveckla elevers känsla för sådana djupa reflektioner är en viktig del i det långsiktiga målet för matematisk modellering. Modellen av processen i figur 2 innefattar såväl beteckningar av delprocesserna som ett försök att utvärdera de sex ingående faserna.

Med matematisk modellering åsyftas hela den process som beskrivs i figur 2. För att illustrera delprocesserna och modelleringsprocessens stadier kan vi se på en situation där en elev i årskurs 8 (14 år gammal) ställer upp och analyserar en modell för att beskriva relationen mellan tiden för morgonduschen och mängden vatten som används. Exemplet är taget från utvecklingsprojektet *Matematiska morgnar* som beskrivs i följande avsnitt.

I detta sammanhang kan ”verkligheten” vara en fenomenologisk förståelse av att det finns en koppling mellan den tid som tillbringas i duschen och den mängd vatten som används. En första uppgift att arbeta med, process (a), kan vara: ”Hur mycket vatten använder jag för min morgondusch?” Senare i processen kan frågeställningen ändras till: ”Hur länge kan vi duscha hemma innan vattnet blir kallt?” I detta sammanhang kan undersökningsområdet innefattas: ”Vad kan möjligen påverka förbrukningen av vatten för en dusch?” Systematiseringen, process (b), bör identifiera vilka väsentliga mekanismer som reglerar bruket av vatten under en dusch. Tre av de faktorer som kan identifieras är: Vattentemperaturen, vattenflödet och duschens varaktighet. För att göra det enkelt kan eleven besluta sig för att inte ta med temperaturen i beräkningen och anta att vattenflödet är konstant. En enkel matematisering, process (c), av detta system skulle leda till ett ”matematiskt system” som består av en linjär funktion (en direkt proportionalitet) som anger mängden varmvatten som en funktion av duschens varaktighet. Analys av detta ”matematiska system”, process (d), kan ge upphov till idéer om hur man uppskattar vattenflödet som den väsentliga modellparametern och följaktligen producerar ”modellresultat” i form av numeriska beräkningar i en tabell eller som en graf. Resultatet måste tolkas och valideras mot empiriska data eller erfarenheter, process (e). Detta kan leda till förändringar i process (b) om man tar med i beräkningen att vattnet behöver rinna några sekunder innan det uppnår en behaglig temperatur. Detta system kan matematiseras till en linjär funktion med två parametrar som kan uppskattas från empiriska data. Sist, men inte minst, ska den matematiska modelleringsprocessens validering utvärderas, process (f), vilket kommer att ifrågasätta det grundläggande antagandet, data som använts för att uppskatta parametrarna och i vilken grad modellen är tillämpbar på andra familjemedlemmar. Nya empiriska data behövs för denna process. Om modellen förändras till att fokusera på hur mycket vatten som behövs för att förse familjen med tillräcklig kapacitet för allas morgonduschar, så skulle modellens resultat kunna användas för att designa ett solcellsdrivet vattenuppvärmningssystem.

Denna beskrivning av en modelleringsprocess svarar inte mot vad som hände i en faktisk undervisningssituation, då en elev arbetade med detta problem. Observationer av denna speciella undervisningsepisod har dock tjänat som inspiration till beskrivningen. En del av episoden analyseras i nästa avsnitt.

Inte heller bör beskrivningen betraktas som ett recept för det ideala tillvägagångssättet när man arbetar med detta problem i en undervisningssituation. Idén är helt enkelt att illustrera att alla delprocesser i en matematisk modelleringsprocess kan lyftas ut ur detta mycket enkla fall där matematik används för att beskriva en situation i verkligheten. Detta innebär att kontexten har potential att i en undervisningssituation utmana elever att arbeta med alla delar av modelleringsprocessen. I princip har alla situationer där matematik används för att beskriva icke-matematiska fenomen eller situationer denna potential. Naturligtvis är inte alla kontexter och problem lika väl lämpade att utmana elever att arbeta med olika delar av modelleringen. Det kan vara klokt att arbeta med delprocesser i flera olika kontexter innan man söker en fullskalig modelleringskompetens hos eleverna.

> Med matematisk modelleringskompetens menas förmågan att självständigt och insiktsfullt genomföra alla aspekter av en matematisk modellering i en viss kontext, jfr figur 2.
>
> (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003)

Modelleringskompetens inkluderar per definition problemlösningskompetens i matematik. I de flesta fall utgör matematiseringen och analysen av modellen (process (c) och (d)) matematiska problem för modelleraren, och inkluderar därmed matematisk problemlösning. Det är dock viktigt att lägga märke till att det är verklighetens problem som ska styra modelleringsaktiviteten och att problemlösandet är underordnat. Ur didaktisk synvinkel är det betydelsefullt att modelleringsansatsen sätter den matematiska problemlösningsaktiviteten i en verklighetskontext och inkluderar problemlösning av utommatematisk natur, se t ex process (a), (b), (e) och (f) i figur 2.

Matematiklärande genom modellering

I utvecklingsprojektet *Matematiska morgnar*, som beskrivs i ett senare avsnitt, var den huvudsakliga idén att utmana eleverna att använda matematik för att beskriva och analysera några fenomen från sin vardag för att

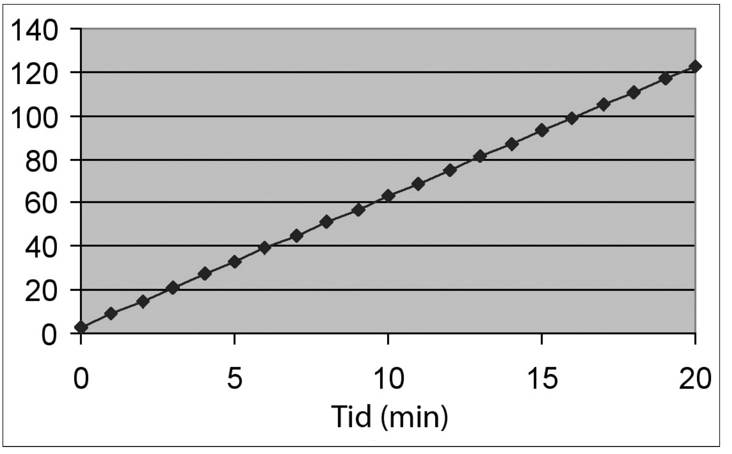
1 motivera till arbete med matematik,
2 etablera en stabil kognitiv grund för förståelse av grundläggande matematiska begrepp,
3 få erfarenhet av matematik som medel för att beskriva, analysera och bredda förståelsen av vardagliga situationer.

Exemplet ”morgonduschen” illustrerar dessa målsättningar. Under kursens gång utmanades en pojke, Morten, av en händelse namne med författaren, som tyckte matematik var svårt och inte särskilt intressant, med uppgiften att ta reda på hur mycket vatten han använder för sin morgondusch. Efter en diskussion om hur denna mängd skulle kunna mätas, inklusive möjligheten att duscha stående i ett jättelikt kärl, beslöt Morten att ta med sig en hink in i duschen nästa morgon och ta reda på hur lång tid det skulle ta att fylla den. Om detta ska stämma måste vattenflödet vara konstant under tiden man duschar och på ungefär samma nivå varje dag. Morten hävdar att han verkligen skruvar på duschen till samma nivå varje morgon. Enligt Morten tog det exakt en minut att fylla hinken som rymmer sex liter. Morten hade emellertid glömt bort att kontrollera hur länge han duschar, så han kunde inte beräkna hur mycket vatten han förbrukar för en normal dusch.

Läraren ger honom utmaningen att göra en tabell som visar hur mycket vatten han förbrukar när han duschar från 1 till 20 minuter. Hans första kommentar var ”De 20 minuterna, det måste vara min syster”. Senare fick Morten också rita en graf och ställa upp en ekvation som beskriver relationerna. Detta var ingen lätt uppgift för Morten. Under diskussionen om resultaten frågade läraren om Morten fick vänta innan han klev in i duschen för att slippa få en kall dusch. Han höll med om att så var fallet, och tog på sig uppgiften att mäta hur mycket kallt vatten som rinner ut innan det är behagligt att gå in i duschen.

Till nästa lektion hade Morten tagit reda på att 3 liter kallt vatten måste rinna ut innan han kan gå in i duschen, och att hans dusch tar 7 minuter, inklusive hårtvätt. Efter ytterligare diskussioner med läraren inkluderade Morten de 3 litrarna kallvatten i sin beräkning av vattenförbrukning för en vanlig dusch: 6 liter/min $\times$ 7 min + 3 liter = 45 liter. Till sin affisch[1] hade Morten också gjort en tabell, en graf och följande ekvation för den nya relationen $y = 6x + 3$, där x är duschtiden i minuter och y är mängden vatten i liter, se figur 3.

[1] Som en del av undervisningsmomentet Matematiska morgnar producerade eleverna A3-affischer där de matematiskt beskrev situationer från sina egna morgnar.



Figur 3. *Avbildning av grafen från Mortens affisch.*

För Morten var detta första gången han hade satt upp ett matematiskt samband som en funktion. Han hade dessutom arbetat med olika former av representationer, och under sitt arbete hade han hela tiden utnyttjat sin kunskap om kontexten. Tabellen gjordes så att 6 liter lades till mängden vatten för varje minut och därefter 3 liter med hänsyn till förändringen av modellen. Genom att plotta värdena från tabellen fick han en graf. När han gjort detta insåg Morten att han kunde ta reda på mängden vatten för vilken dusch som helst för tider mellan 0 och 20 minuter. Uppmuntrad och stärkt av dialogen med läraren lyckades Morten teckna ett uttryck för funktionen. Han förstod att kurvans lutning var precis det flöde som han hade mätt till 6 liter per minut. Ur didaktisk synvinkel innehåller denna episod viktiga inslag. Det förefaller som om Morten så småningom skapade sin egen motivation för att modellera sin morgondusch, och att han därför också var villig att anta lärarens utmaningar. Dialogen med läraren gjorde det möjligt för Morten att reflektera över relationen mellan sin erfarenhet och den matematiska modellen av morgonduschen. En annan viktig aspekt av situationen är att modellens matematikinnehåll är relevant för lärandet av enkla matematiska begrepp inom räckhåll för varje enskild elev.

Enligt min bedömning har Morten, genom att modellera sin morgondusch, byggt upp en stabil grund för förståelse av begreppet funktion och av representationer som hör ihop med räta linjen. Morten kan tolka sin morgondusch matematiskt. Efter diskussion med läraren har han nu möjlighet att förändra linjens lutning som han vill genom att ändra vattenflödet – inom vissa gränser, naturligtvis. En sådan erfarenhet och reflektion är en god grund för begreppslig förståelse av lutningen för en linjär funktion. Morten hade ingen formell kunskap om matematisk modellering före denna episod, och läraren påpekade inte arbetets modelleringsaspekter för honom. Men kursens uppläggning och lärarens interaktion med eleverna styrdes av idén om matematikinlärning genom modelleringsaktiviteter. Exemplet kan, som framhållits, beskrivas och analyseras med hänvisning till modelleringsprocessen. Inlärningspotentialen i denna episod ligger i elevens reflektioner i anslutning till process (a), (b) och (c) i processen och lärarens kunskap om modellering var vägledande i hans dialog med eleven.

Matematisk modellering som undervisningspraktik

Att undervisa om matematisk modellering är, som antytts, en svår uppgift. Lärare måste skapa en situation där elever kan arbeta med bekanta fenomen eller situationer från verkligheten, och som tillåter dem att använda sig av sina matematikkunskaper i modelleringsprocessen. Att skapa situationer för modellering är därför avgörande inslag då man undervisar om denna (Skovsmose, 1994). Den allmänna beskrivningen av modelleringsprocessen (se figur 2) inkluderande delkompetenser samt generella utvärderingsargument kan användas som verktyg för att planera undervisningen. I det följande presenterar jag ett sätt att skapa en situation för modelleringsaktiviteter i matematik för grundskolans senare år.

Matematiska morgnar

Detta är ett utvecklingsprojekt där författaren och matematikläraren Mikael Skånstrøm vid en dansk experimentskola i Rødovre samarbetat med att planera, undervisa, observera och analysera ett undervisningsmoment för elever i årskurs 8. Eleverna utmanas att använda matematik för att modellera fenomen från sina vardagsmorgnar. Kursen börjar med att läraren ger följande instruktion:

Matematiska morgnar

Väckarklockan ringer. Du sträcker ut handen efter den och den ramlar ner från bordet. Du hittar den och stänger av den med en djup suck. Du vänder dig på andra sidan och försöker låtsas att det är lördag, men långsamt börjar du känna att någonting intressant kommer att hända idag. Nu kommer du ihåg, *Matematiska morgnar* med Mikael och Morten. Klockan 8.00 kommer du att vara tillsammans med de andra och arbeta med beskrivningen av din matematiska morgon. En spännande dag väntar dig... Du sätter på dig dina matematikglasögon, redo att observera din morgon på ett matematiskt sätt.

Kanske kontrollerar du elmätaren på väg till badrummet? Hur mycket vatten använder du när du borstar tänderna, och hur länge kan du använda samma tandkrämstub? Hur är det med duschen? ... Du kan också hitta matematik i hur du använder din tid på morgonen, hur du tar dig till skolan och i många andra händelser.

→

Din uppgift

Gör noggranna observationer av vad du ser med dina matematikglasögon från det ögonblick du vaknar tills du är i skolan. Dina observationer ska beskrivas och analyseras matematiskt och bli till en sammanhängande berättelse om din vardagsmorgon. Berättelsen och dina reflektioner ska presenteras på ett A3-ark med trevlig layout. Du har fyra lektionspass, 4×90 minuter till ditt förfogande. Alla ska göra sin egen affisch, men ni får gärna arbeta tillsammans och hjälpa varandra. Två lärare kommer att finnas till hands om ni vill diskutera eller ha hjälp.

De 48 eleverna indelade i två grupper var alla aktivt engagerade i uppgiften, trots att de inte var vana vid denna form av matematikundervisning. Alla var nya på skolan, och projektet genomfördes endast två månader efter skolårets början. Alla elever utom en lämnade in en A3-affisch med berättelser från sina morgnar och deras matematiska innehåll. De flesta postrar var noggrant komponerade med färger och datorgrafik. Nästan alla innehöll beräkningar och grafiska representationer baserade på elevernas data. Omkring en tredjedel av eleverna hade skrivit formler och förklarat sina beräkningar i ord och genom att sätta ut enheter i sina figurer. Bara ett fåtal av postrarna innehöll reflektioner över de metoder som använts eller över resultaten. När de uppmuntrats av lärarna kunde emellertid de flesta eleverna reflektera över sitt arbete och sina resultat.

När eleverna valde vad de skulle observera lät sig många inspireras av lärarens korta introduktion. Bland de vanligaste ämnena fanns: Hur tiden fördelades på morgonrutiner och transport, återgivet i cirkeldiagram; vattenförbrukning för dusch och tandborstning; energiinnehåll och pris på olika frukostprodukter; olika transportmedel, kostnad, tidsåtgång och (genomsnitts)hastighet. Till detta kom några observationer av mer personligt intresse, t ex frågor som hade att göra med elevens husdjur eller antalet möjliga kombinationer av kläder i garderoben. För att uppmuntra elever att själva bestämma sig för vad de tycker är viktigt är det nödvändigt att skapa en situation som ger dem en idé om olika möjligheter. Vårt experiment visar dock att konkreta exempel sannolikt kommer att kopieras av eleverna. Detta är ett dilemma som måste vägas in i den praktiska planeringen. Resultaten av vår projektanalys sammanfattas i följande punkter:

- Samtliga elever verkade tycka om idén att beskriva sina egna morgnar matematiskt. Aktivitetsnivån var hög, och ingen ifrågasatte projektets relevans.
- Eleverna använde mycket tid till praktiska frågor kring att samla fakta och utforma sina redovisningar.
- Eleverna hjälpte och inspirerade varandra och vände sig ofta till lärarna.
- Nästan alla elever gjorde beräkningar och använde grafiska representationer av egna data.

– För att reflektera över sina matematiska beskrivningar behövde eleverna uppmuntran och stöd från lärarna.

Projektet gav vid flera tillfällen upphov till ”en öppen kanal” då en elev blev mycket ivrig att lära sig den matematik som var relevant för uppgiften. I detta mycket öppna sätt att skapa situationer för elevers modelleringsaktiviteter ges eleverna möjlighet att arbeta med hela modelleringsprocessen. I *Matematiska morgnar* utmanades de i huvudsak att arbeta med de första delarna av modelleringsprocessen, dvs delprocesserna (a) och (b). Efterföljande undervisning är nödvändig om elevernas individuella erfarenheter från kursen ska kunna fungera som bas för utveckling av förståelse för modelleringsprocessen. Kursens kvalitet har mycket att göra med de affektiva aspekterna av lärandeprocessen.

Uppläggningen motiverar eleverna att arbeta självständigt med matematik för att beskriva och analysera situationer ur sitt eget liv. Flera elever fick under kursen upp ögonen för matematiken i sina vardagsliv.

Det bör påpekas att sättet att arrangera situationen lätt kan förändras för att ge mer specifik vägledning om vilka fenomen eller problem eleverna ska inrikta sig på. Det blir då möjligt att vägleda eleverna mot modelleringsaktiviteter som omfattar matematiska begrepp eller metoder som är särskilt relevanta. Detta bör dock vägas mot motivationseffekten av att ge eleverna fritt val och möjlighet att uppmuntra dem att också arbeta med problemformulering, process (a) i modelleringsprocessen. Samma klass utmanades senare att modellera fenomen som hade med hastighet att göra, och detta användes som startpunkt för systematisk undervisning om begreppet hastighet.

Matematisk modellering som teori för praktik

Den matematiska modelleringens teori vilar på definitionerna av matematisk modell, modellering och modelleringskompetens. Men teorin, som fortfarande är under utveckling, är mycket mer än bara dessa definitioner och en allmän förståelse av matematisk modellering så som den återges i figur 2. Teorin inkluderar också motiv för matematisk modellering som centralt element i matematikundervisning på olika nivåer i utbildningssystemet. Däri ingår även förslag och reflektioner kring hur man kan implementera matematisk modellering i olika utbildningssammanhang. Berättigandet av modellering som moment i matematikundervisning i det allmänna skolväsendet har i många år varit en tvistefråga inom forskningen kring matematikutbildning (Niss, 1989).

Nedan redogör jag kortfattat för vad jag anser vara de tre viktigaste argumenten för matematisk modellering som centralt moment i matematikundervisning, redan från tidiga åldrar.

1 Modellering överbryggar gapet mellan elevers erfarenheter av verkligheten och matematiken. Den motiverar dem att lära sig matematik, ger direkt kognitivt stöd för begrepp och placerar matematik i kulturen som ett sätt att beskriva och förstå verkliga situationer.

2 I högteknologiska samhällens utveckling är kompetensen att ställa upp, analysera och kritisera matematiska modeller av avgörande betydelse. Detta är fallet både ur ett individuellt perspektiv med tanke på möjligheter och utmaningar i utbildning och arbetsliv, och ur ett samhälleligt perspektiv med tanke på behovet av arbetskraft med adekvat utbildning.

3 Matematiska modeller av olika slag och komplexitet spelar en viktig roll för hur högteknologiska samhällen fungerar och formas. Därför blir utvecklingen av både expertens och lekmannens kompetens att kritisera modeller och sätten de används på allt viktigare för att bevara och vidareutveckla demokratin.

Naturligtvis har modellering olika innebörd i olika utbildningar, och dessa argument ska inte tillmätas samma betydelse på alla nivåer. På grundskolans högstadium kan eleverna använda matematik för att beskriva situationer från sitt dagliga liv, till en början utan att ens inse att de arbetar med modellering. Undervisningen kan ändå leda till att man förverkligar det första argumentet [3]. Det är redan på grundskolans högstadium möjligt att utmana eleverna att genomföra en fullskalig modellering och att reflektera över dess resultat. Projektet ”Matematiska morgnar” kan faktiskt illustrera möjligheten att fokusera på ett av de tre argumenten genom att medvetet arrangera en situation för elevernas modelleringsarbete. I detta sammanhang vill jag betona att teorin om modellering är användbar för planering och genomförande av matematikundervisning och lärande på alla nivåer. Mina erfarenheter från utvecklingsprojekt på högstadiet (Blomhøj, 1993; Blomhøj & Skånstrøm 2002), på gymnasienivå (Blomhøj, 1991), i lärarutbildning (Blomhøj, 2000) och på universitetsnivå (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003) visar att teorin kan vara ett redskap för undervisningen om matematisk modellering genom att

- analysera autentiska modelleringsprocesser retrospektivt och anpassa dessa för undervisning,
- analysera elevers modelleringsaktiviteter,
- identifiera delkompetenser som ingår i modelleringsprocessen,
- utforma undervisningsepisoder och förbereda dialoger för att utmana delkompetenserna,
- kommunicera och diskutera modelleringskursens målsättning,
- undervisa om matematisk modellering baserad på elevernas erfarenheter.

Teorin om matematisk modellering utvecklas nu vidare genom samspel med praktik. Undervisningserfarenheter och resultat av analyser av elevers modellerings-

[3] Utvecklingsprojektet ”Matematiska morgnar” var medvetet inriktat mot att förverkliga det första argumentet, se även Blomhøj & Skånstrøm (2002).

erfarenheter tillför nya insikter i processerna om undervisning och lärande via modellering [4]. Här följer exempel på sådana rön:

- Elever tycker i allmänhet att det är motiverande och relevant att arbeta med autentiska problem – dvs problem som är relevanta för någon utanför klassrummet.
- Kvasiautentiska situationer – dvs sammanhang som konstruerats för undervisning – kan också stödja elevers konstruktion av betydelse, om de är tillräckligt rika och tas på allvar i undervisningen.
- Matematikkunnande – begreppslig eller proceduriell – är inte en förutsättning för modelleringsaktiviteter. Erfarenhet visar att sådana kan motivera lärande. De kan skapa en lämplig kognitiv bas för elevers konstruktion av matematiska begrepp och vara ett sätt att utmana deras begrepp genom att senare utvidga modelleringsaktiviteternas område.
- Elevers begrepp om modellering utvecklas långsamt och är starkt beroende av personliga erfarenheter av modelleringsprocessen. Detta understryker vikten av en utbildningsplanering som sträcker sig över olika nivåer i utbildningssystemet.
- Elevers kunskap om olika processer som ingår i modellering är viktig för att de ska kunna strukturera sina erfarenheter.
- Framsteg och hinder för elevers utveckling av modelleringskompetens kan förstås med hänvisning till beskrivningen av delprocesser i modellering. En sådan förståelse kan ge stöd i undervisningsplaneringen.
- Olika typer av hinder kan identifieras:
  - Otillräcklig erfarenhet eller kunskap om det område som modelleringsaktiviteterna gäller. (Det skulle kunna ses som en del av undervisningens syfte att utveckla sådan erfarenhet eller kunskap.)
  - Kognitiva hinder, särskilt i fråga om (c) och (d) i modelleringsprocessen.
  - Sociologiska hinder, särskilt i fråga om (a), (b), (e) och (f) i modelleringsprocessen.
  - Affektiva faktorer.

Slutsats

Från forskningslitteraturen och min egen erfarenhet av att undervisa om matematisk modellering på olika nivåer finner jag klara belägg för följande tre påståenden angående matematisk modellering:

---

[4] Det finns en mängd beskrivningar och reflektioner kring liknande tillämpningar av modellering i litteraturen, t ex (Niss, Blum & Huntley, 1991), (de Lange, Keitel, Huntley & Niss, 1993), (Ye, Blum, Houston & Jiang, 2003) och (Gravemeijer och Doorman, 1999).

Det är möjligt att identifiera vad som kan kallas en teori för undervisning och lärande av matematisk modellering och denna kan användas som bas för utveckling av matematikundervisningen.

I synnerhet är detta sant för matematikundervisning i den senare delen av grundskolan. Modellering i matematik på denna nivå kan ses som ett sätt att lära sig matematik och även som ett utvecklingsmål i sig.

Teorin har utvecklats och utvecklas fortlöpande genom interaktion mellan teoretiska reflektioner och utveckling av undervisningens praktik, och den kan därför betraktas som ett paradigmatiskt exempel på teoretisk utveckling i forskningen kring matematikens didaktik.

Referenser

Blomhøj, M. (1991). Mathematical modelling at upper secondary level. I M. Niss, W. Blum & I. Huntley (Red), *Teaching of mathematical modelling and applications* (s 187–194). London: Ellis Horwood.

Blomhøj, M. (1993). Mathematical modelling in elementary mathematics teaching. I J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley & M. Niss (1993), *Innovation in maths education by modelling and applications* (s 257–268). London: Ellis Horwood.

Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its applications 22* (3), 123–139.

Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (2002). Matematikmorgener – et udviklingsarbejde. I I. Holden (Red), (2003), *Utvikling av matematikkundervisning i samspill mellom praksis og forskning – nye arbejdsformer i matematikkundervisningen* (s 61–72). (No 1 i skriftserie for Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen.) Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskaplige universitet.

Blum, W. m fl. (2003). *ICMI-Study 14. Application and modelling in mathematics education*. (Specialutgåva av ICMI-Bulletin 2003).

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 111–129.

de Lange, J., Keitel, C., Huntley I. & Niss, M. (1993). *Innovation in maths education by modelling and applications*. London: Ellis Horwood.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. In W. Blum, m fl. (Red), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, (s 22–31). Chicester, UK: Horwood Publishing.

Niss, M., Blum, W. & Huntley, I. (Red) (1991). *Teaching of mathematical modelling and applications*. London: Ellis Horwood.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ye Q., Blum W., Houston, S.K. & Jiang, Q. (Red) (2003). *Mathematical modelling in education and culture*. ICTMA 10. Chichester, UK: Horwood Publishing.

Undervisa genom problemlösning

FRANK K. LESTER & DIANA V. LAMBDIN

Att undervisa i matematik via problemlösning har som huvudmål att elever ska utveckla en djupare förståelse för matematiska begrepp och metoder. Vägen till förståelse går via elevernas arbete med utvalda problem där den matematik som ska studeras finns inbäddad. Vi fokuserar två frågeställningar: Vilka är fördelarna med att undervisa genom problemlösning? och Vad säger forskningen om hur lärare kan lära sig att undervisa genom problemlösning?

Artikeln avslutas med en diskussion kring några konkreta exempel på hur man kan undervisa genom problemlösning.

De senaste 15 åren har såväl intresse som forskning ökat vad gäller att sätta problemlösning i fokus inom skolmatematiken (NCTM, 1989)[1]. Idag råder enighet bland ledande matematikutbildare om att problemlösningens roll i skolmatematiken bör få en ny karaktär. Idag är problemlösning ofta en aktivitet som kommer efter att eleverna studerat begrepp och färdigheter. Istället bör problemlösning betraktas som ett hjälpmedel för att utveckla nya kunskaper i matematik. Det är gott och väl att författarna till de senaste upplagorna av NCTM-dokumenten föreslår att problemlösning skall "fungera som ett medel för att lära sig matematiska idéer och färdigheter" (NCTM, 2000, s 182), men det är något helt annat att tillfredställa behovet av sammanhängande och tydlig vägledning för lärare om hur detta ska gå till.

Som ett svar på detta behov av vägledning initierade NCTM ett uppdrag att utveckla två böcker innehållande artiklar som behandlar "problemlösning som medel för att lära sig matematik". Den ena boken är inriktad mot undervisning av elever i åldern 5–11 år (Lester & Charles, 2003), den andra mot äldre elever, 12–18 år (Schoen & Charles, 2003). Diana Lambdin medverkade i det redaktionsråd som sammanställde och granskade artiklarna. Hon skrev också introduktionskapitlet till boken för tidigare år.

[1] NCTM, National Council of Teachers of Mathematics

Vid sammanställningen av de två böckerna vägleddes redaktionsrådet av vad det ansåg vara det centrala budskapet i fyra dokument utgivna av NCTM [2]. Detta budskap handlar om att se skolans matematikundervisning som ett sammanhängande system. Enligt Hiebert m fl (1997) omfattar ett sådant system fem dimensioner

1 karaktären hos skolmatematikens uppgifter,

2 lärarens roll,

3 den socio-kulturella miljön i klassrummet,

4 matematiska verktyg som hjälpmedel för lärande,

5 jämlikhet och tillgänglighet.

Om man förändrar något i en av dessa dimensioner, så måste motsvarande ändringar göras i de andra eftersom de bildar en helhet.

I denna artikel behandlas två teman, dels vilka fördelar det är med att undervisa genom problemlösning, dels vad forskningen säger om hur lärare kan lära sig undervisa på detta sätt. Innan vi diskuterar dessa teman tar vi upp de övergripande visioner som väglett oss vid arbetet med de två böckerna.

Amerikansk undervisningstradition

Det senaste seklets dominerande matematikundervisning i USA kan grovt karaktäriseras med hjälp av några av de dimensioner som nämnts ovan:

- Uppgifterna som eleverna arbetar med kommer framför allt från läroboken. Dessa är i huvudsak korta, saknar kontext och är symboltyngda. De syftar till att eleverna ska behärska och behålla sina procedurfärdigheter.
- Lärarens roll är att visa lösningar av typexempel för eleverna som förväntas lyssna och lära sig att tillämpa demonstrerade metoder. Eleverna övar sedan dessa genom ett individuellt räknande av många uppgifter, som liknar de som läraren löst. Om dessa metoder/procedurer överhuvudtaget används för att lösa vardagsproblem så är problemen kortfattade, tillrättalagda textuppgifter som ges i direkt anslutning till de metoder/procedurer som behövs för att lösa vardagsproblemen.
- I den traditionella socio-kulturella miljön i klassrummet finns en överenskommelse att läraren och facit är de enda matematiska auktoriteterna. Elever som utvecklar färdigheter i att använda just de procedurer som presenteras i läroböckerna eller demonstreras av läraren belönas med

[2] De fyra NCTM-dokumenten är: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991), *Assessment Standards for School Mathematics* (1995) och *Principles and Standards for School Mathematics* (2000).

beröm och höga betyg. Eleverna utvecklar och använder olika typer av tänkande och strategier för att lösa problem. En del är matematiskt korrekta, en del är inkorrekta. I denna miljö är deras tänkande och strategier generellt sett betydligt mindre intressanta än det korrekta svaret på problemet och den av läroboken föreslagna metoden.

Den olyckligaste konsekvensen av den ovan beskrivna undervisningen är att eleverna även i bästa fall lämnar skolan med bara en uppsättning av fakta, procedurer och formler som förstås på ett ytligt och osammanhängande sätt. Kanske än värre är att de knappast kommer att ha en aning om hur det de lärt sig kan användas utanför skolan.

Undervisning genom problemlösning: Ett alternativt sätt

De två böcker som nämns i början, beskriver tillsammans vad det innebär att *undervisa i matematik genom problemlösning*. Huvudmålet är att elever skall utveckla djup förståelse för matematiska begrepp och metoder. Nyckeln till en sådan förståelse är elevernas egna engagemang och att de försöker skapa mening i de problemuppgifter de arbetar med. Förutom den nya matematik som används i arbetet, lär sig eleverna genom engagemang, meningsskapande och problemlösning även att arbeta matematiskt vilket i sin tur innebär att de utvecklar ett sätt att tänka som är användbart för vilken matematisk situation som helst.

Att undervisa på detta sätt innebär inte att man ska leta rätt på och använda en massa ”roliga” problem. Det främsta kravet är att den matematik som skall behandlas måste vara inbäddad i de utvalda problemuppgifterna. För det andra måste uppgifterna vara tillgängliga och utmanande för eleverna samt bygga på vad de redan vet och kan göra. För det tredje har läraren en mycket viktig uppgift i att se till att de normer som finns i klassrummet verkligen uppmuntrar eleverna att lära sig på detta sätt. Vidare måste läraren betona att eleverna noggrant ska fundera över sina och klasskompisarnas lösningsmetoder. Och kanske viktigast av allt, att fundera över den matematik som de lär sig under arbetet.

Läraren skall också se till att eleverna har tillgång till lämpliga teknologiska och intellektuella verktyg, vilket också innebär färdigheter med papper och penna. En verklig utmaning blir det för lärare och kursplanekonstruktörer att finna vägar så att undervisning genom problemlösning verkligen blir tillgänglig för alla.

Att se klassrumsundervisning som ett system i fem dimensioner är ett förhållningssätt som vuxit fram genom mer än 20 års klassrumsbaserade studier utförda av forskare och teoretiker. Denna forskning har varit teoriinriktad på så sätt att den syftat till att utveckla en eller flera teorier för matematikundervisning. Resultaten bygger till stor del på det socialkonstruktivistiska perspektivet.

Vi anser att de primära målen med matematiklärande är förståelse och problemlösning. Dessa två mål är naturligt relaterade till varandra eftersom förståelse uppnås bäst genom problemlösning. Relationen mellan problemlösning och förståelse är alltså symbiotisk. Vi vill att elever ska kunna lösa problem

– både i matematik och i verkliga livet. Om man inte kan lösa några problem med den matematik man lärt sig, vad är den då bra för? Men för att kunna lösa problem måste man ha en djup begreppslig förståelse av den matematik man lär sig – annars kommer man bara att klara av rutinuppgifter. Således, för att bli en bra problemlösare behöver man en gedigen förståelse – *förståelse förhöjer problemlösningsförmågan*.

Å andra sidan, problem är per definition en situation som skapar mental obalans, förvirring etc – man vet inte vad man ska göra. En grundtanke med undervisning genom problemlösning är att individer som ställs inför problem tvingas in i ett mentalt tillstånd där de behöver förstå hur man kan koppla ihop olika slag av kunnande. Följaktligen, *lärande genom problemlösning utvecklar förståelsen*. Elevers mentala nätverk av idéer och begrepp utvecklas och växer i komplexitet och styrka när de löser problem som tvingar dem att tänka djupare samt att relatera, utvidga och förfina sina tidigare kunskaper.

Ett lärande inriktat mot förståelse är visserligen ofta svårare att uppnå, och tar mer tid än att endast memorera eller att kopiera, men ändå överväger fördelarna. Matematikdidaktiker har identifierat åtminstone sex orsaker till varför det är fördelaktigt för elever att lära sig matematik inriktat mot förståelse (Hiebert & Carpenter, 1992; Van de Walle, 2001). Dessa sammanfattas nedan:

Förståelse är motiverande

Ingenting är mer belönande än känslan att en idé är begriplig och sammanhängande, och ingenting är mer frustrerande än att inte förstå. Elever som inte förstår en idé eller ett begrepp känner sig ofta så avskräckta och nedtryckta att de till och med slutar att försöka lära sig genom att förstå. Eleverna måste då istället motiveras med hjälp av yttre belöningar eller påtryckningar (t ex hot om prov, pengar för bra betyg, en guldstjärna i kanten, önskan att tillfredställa föräldrar eller lärare).

Men när något känns begripligt för en elev, så uppmuntras hon/han av sin egen inre önskan att fördjupa förståelsen. Eleven vill lära sig mer eftersom det är en så svindlande känsla att lyckas relatera nya idéer till gamla. Hiebert m fl (1997) uttrycker det träffsäkert med följande formulering ”förståelse föder självtillit och engagemang; att inte förstå leder till uppgivenhet och brist på engagemang” (s 2).

Förståelse skapar förutsättningar för mer förståelse

Vi gör vår värld begriplig genom att använda de idéer, begrepp och procedurer vi har tillgängliga. När vi ställs inför obekanta matematiska situationer försöker vi använda de idéer, begrepp och beräkningsmetoder som vi använt förut. Om vi endast ytligt förstår det vi försöker använda oss av, så att vi inte inser om situationen eller metoderna är lämpliga, så kan dessa vara olämpliga för just denna situation eller komma att tillämpas på ett inkorrekt sätt. Följden blir att vi inte kan lösa problemet.

När elever försöker lösa problem genom att använda sitt nätverk av matematisk förståelse är sannolikheten högre att den använda matematiken blir användbar och också produktiv. ”Inventions that operate on understandings can generate new understandings, suggesting a kind of snowball effect. As networks grow and become more structured, they increase the potential for invention" (Hiebert & Carpenter 1992, s 74).

Förståelse hjälper minnet

När våra idéer är osammanhängande är de svåra att komma ihåg. De flesta vuxna kan erinra sig att de memorerade ändlösa rader av osammanhängande fakta i skolan i flera ämnen, inte bara matematik. Många av dessa fakta glömdes bort kort efter lektionen eller efter provet. Men när enskilda idéer får mening pga att de blir kopplade till andra idéer, så blir det mycket mindre att memorera. Det finns t ex ingen anledning att memorera olika regler för hur decimaltecknet skall placeras vid additions-, subtraktions-, multiplikations- och divisionsproblem om vi istället förstår denna enda princip: Principen för hur platsvärdet representeras i det decimala systemet.

Med hjälp av förståelsen av platsvärdet kan vi enkelt avgöra var decimaltecknet skall placeras vid vilken beräkning som helst. En enskild viktig princip, som egentligen är ett väl sammanhängande nätverk av mindre principer, är alltså lättare att komma ihåg än flera enskilda osammanhängande principer.

Förståelse förbättrar transfer

Transfer, dvs att kunna tillämpa sina kunskaper i nya situationer, är kanske den enskilt största utmaningen i all undervisning. Det är en sak att prestera väl på ett prov när provfrågorna nyligen behandlats vid lektionstillfällen, men något helt annat att kunna tillämpa det man lärt sig i andra, kanske oväntade, framtida situationer i eller utanför skolan. Naturligtvis måste transfer vara målet med utbildning, vi förbereder ju eleverna för ett framtida liv utanför skolan.

De flesta lärare har säkert hört sina elever klaga "Men berätta nu då vad jag skall göra (addera? subtrahera? multiplicera? dividera?), så att jag kan lösa problemet". Dessa elever har lärt in matematiska principer och procedurer utan att egentligen förstå dem. Det är därför de blir så hjälplösa i nya situationer.

Förståelse påverkar attityder och föreställningar

Förståelse leder till att elever ser på matematikämnet på ett mer positivt sätt, eftersom förståelse gör matematiken logisk, sammanhängande och meningsfull. Detta är ett resultat av att deras självförtroende stärks och att de blir mer benägna att ge sig i kast med utmanande situationer. Elever som inte uppfattar hur matematiska idéer hänger samman blir däremot i allmänhet negativa till matematikämnet i sig. De upplever det som godtyckligt och mystiskt – ett ämne som bara "genier" kan behärska.

Förståelse leder till självständiga elever

Elever lär sig mer och bättre när de tar kontroll över sitt eget lärande genom att definiera sina inlärningsmål och styra sitt arbete mot dessa mål. När barn är små engagerar de sig naturligt i problemlösning och meningsskapande. Förskolebarn gör ofta sina föräldrar tokiga genom sina varför-frågor.

Tyvärr har traditionell undervisningspraktik i USA snarast uppmuntrat barn att överge sin nyfikenhet och upphöra med sitt intuitiva sätt att tänka. Istället har de lockats – åtminstone i skolan – att imitera vadhelst läraren eller läroboken uppmanar dem att göra. Elever i alla åldrar bär med sig många idéer till skolan. Dessa idéer består av både informell intuition om världen omkring oss och idéer från tidigare skoltid. Alla dessa idéer har potential att logiskt relateras till nya idéer. Eftersom nya kunskaper bäst byggs upp i relation till tidigare kunskaper bör lärare verkligen försöka reda ut vad eleverna redan kan.

Elever som upplevt problemlösning agerar mer självständigt och ser ofta svåra uppgifter som en utmaning som ska mötas istället för som ett kommande nederlag. När eleverna sedan lyckas lösa ett svårt problem eller lyckas förstå en komplex idé kan de bli uppfyllda av en mycket speciell självkänsla och få ökad tilltro till egen förmåga.

Vad forskningen säger

De senaste decennierna har man gjort väsentliga framsteg i förståelsen av de komplexa processer som ingår i problemlösning. Det har också varit en hel del diskussion om matematikundervisning kopplad till problemlösning. Att undervisa matematik genom problemlösning är dock en relativt ny idé i problemlösningens historia (Lester, 1994), därför har det inte ännu forskats så mycket kring detta. Ganska lite är känt om de faktiska mekanismer som elever använder för att lära sig och förstå matematik just genom problemlösningsaktiviteter. Trots detta råder det en stor enighet om att undervisning genom problemlösning utvecklar elevers lärande. Många väsentliga forskningsfrågor är relaterade till detta sätt att undervisa, t ex lärarens roll, konstruktion och urval av problem, grupparbeten, problematiseringar av styrdokument. Dessa områden har nu studerats ingående och forskningsbaserade svar på ett flertal frågor om problemlösningsundervisning finns numer tillgängliga.

Vad säger då forskningen om undervisning av matematik genom problemlösning? Jinfa Cai (2003) poängterar att vissa aspekter av detta angreppssätt har betydande empiriskt stöd, men att det kvarstår några viktiga frågor som behöver kompletterande forskning. Cai menar att det finns ett växande stöd bland forskare, lärarutbildare och lärare för idén att matematikundervisning genom problemlösning skulle vara ett lovande angreppssätt. Han påpekar också att detta angreppssätt verkar rimligt utifrån ett teoretiskt perspektiv. Vidare hävdar han att lika viktiga som teoretiska argument är den växande mängden empiriska resultat som stöder idén att undervisa genom problemlösning. Speciellt betonar han följande fyra frågeställningar, som varit i fokus för ett betydande antal forskningsstudier:

- Hur kan lärare lära sig att undervisa genom problemlösning?
- Är barn verkligen kapabla att själva utforska problem och komma fram till vettiga lösningar?

– Kommer elever att bli sämre på basfärdigheter om de undervisas i matematik genom problemlösning?
– Vilka uppfattningar har eleverna själva av undervisning genom problemlösning?

Av utrymmesskäl är det omöjligt för oss att i detalj diskutera alla fyra frågorna. Vi har valt att begränsa vår diskussion till de huvudsakliga slutsatserna kring den första.

Hur kan lärare lära sig att undervisa genom problemlösning?

Det finns relativt lite forskning tillgänglig om hur lärare lär sig att undervisa genom problemlösning. Emellertid finns forskningsresultat som på några punkter ger oss angelägen information. Resultaten indikerar att lärares framgångar med att undervisa matematik genom problemlösning är relaterad till den uppmuntran och det stöd de får från sina lärarkollegor, samt från annan personal när de börjar ändra sitt sätt att undervisa (Cohen, 1990; Cobb m fl, 1991; Greeno & Goldman, 1998; Ma, 1999; Stein m fl, 1999; Stigler & Hiebert 1999). Lärare lär sig sin nya roll genom att undervisa och genom självreflektion, snarare än genom att endast gå kurser (Ball, 1993; Borko & Putnam, 1996; Bransford, Brown & Cocking, 2000; Shimhara & Sakai, 1995).

Efter en serie studier på blivande grundskole- och gymnasielärare kunde Ball (1993) dra slutsatsen att en ökad mängd matematikkurser inte ökar lärarstudenternas förståelse för skolmatematiken eller deras förmåga att undervisa. Lärare behöver istället tillfällen att analysera matematiska idéer och relatera dessa till undervisningssituationer. Dessutom lär sig lärare att undervisa genom att delta i dagliga kollegiala aktiviteter i skolan (Paine & Ma, 1993; Stein m fl, 1999). Shimahara och Sakai (1995) fann att amerikanska och japanska nyutexaminerade lärare lärde sig mer om undervisning genom sina dagliga konversationer med andra lärare än genom workshops eller verksamhetsförlagd undervisning. Vardagliga diskussioner om undervisning i skolan är viktiga eftersom dessa är konkreta och kontextuella snarare än abstrakta och kontextlösa.

I lärarens nya roll ingår val av lämpliga uppgifter samt att organisera klassrumssamtal för att uppmuntra elevers matematiska förståelse. Forskning erbjuder viss information om vilka faktorer som inverkar på hur lärare väljer lämpliga uppgifter och organiserar klassrumskommunikationen.

Van de Walle (2003) poängterar att vid undervisning genom problemlösning så är eleverna aktivt deltagande i kunskapsbildningen. På så sätt kopplar eleverna matematiklärandet till sina egna förutsättningar. Uttryckt i andra ord; de blir aktiva deltagare i sitt skapande av kunskap snarare än passiva mottagare av regler och procedurer. Eftersom undervisning genom problemlösning startar med ett problem, så måste problemet vara så rikt att de ger eleverna möjlighet att befästa och utvidga vad de redan vet samt ge stimulans i lärandet. Därför är en av lärarens viktigaste uppgifter att välja och utveckla sådana värdefulla problem.

Doyle (1998) har argumenterat för att problem med olika kognitiva krav rimligen framkallar olika typer av inlärning. Problemen styr inte bara elevers uppmärksamhet mot ett speciellt matematiskt innehåll utan också deras sätt att hantera inkommande information. Oavsett sammanhang ska värdefulla problem vara så fascinerande och utmanande att de uppmuntrar till att utforska, spekulera och att arbeta uthålligt med uppgiften (NCTM, 2000, s 19).

Att använda värdefulla problem

Men vad är ett värdefullt problem? Lappan och Phillips (1998) har utvecklat användbara kriterier vid val av problem för undervisning av elever i åldern 11 – 15 år. Dessa kriterier kan också användas vid val av problem för undervisning i tidigare år. Utan tvekan är det viktigaste kriteriet att ett värdefullt matematiskt problem skall fungera som ett medel för elever att lära sig matematik som betraktas som väsentlig. Sådana problem behöver inte nödvändigtvis få ett fantasieggande utseende. Så länge som problemet kan uppnå målet att vägleda elevers lärande är det ett värdefullt problem. Det är också viktigt att värdefulla problem implementeras på lämpligt sätt. Stein, Grover och Henningsen (1996) fann att endast omkring 50 % av de uppgifter som använts för att skapa mening och förståelse implementerats på ett sätt som gav önskat resultat. En viktig roll för läraren är därför att besluta om på vilket sätt de värdefulla problemen ska användas för att maximera elevers möjligheter att lära. Det är inte bara en fråga om att starta problemlösningsaktiviteter, utan typen av engagemang är mycket viktig. Med andra ord, karaktären hos klassrumskommunikationen – skapad av både elever och lärare – är avgörande. Elever måste t ex också få möjlighet att engagera sig i kognitivt utmanande frågor (Hiebert & Wearne, 1993; Lampert, 1990).

Ett antal faktorer kan tänkas påverka implementeringen av värdefulla problem. En av de mest betydelsefulla faktorerna är hur mycket tid som ges till att lösa problemet samt till att diskutera lösningsförslagen (Henningsen & Stein, 1997; Perry, Vanderstoep & Yu, 1993; Stigler & Hiebert, 1999). Vid undervisning genom problemlösning tar diskussionen av ett problem och dess alternativa lösningar oftast längre tid än en vanlig lektion (Hiebert & Wearne, 1993). I sådana problemlösningsmiljöer ställer läraren dessutom mer begreppsrelaterade frågor t ex kring att beskriva en strategi eller att förklara ett underliggande resonemang för att komma fram till svaret, och färre rena ”kom-ihåg-frågor” än traditionellt. Dessa forskningsresultat stämmer överens med de resultat som framkommit vid jämförande studier mellan olika kulturer (Perry m fl, 1993; Stigler & Hiebert, 1999).

Vid undervisning genom problemlösning är lärarens orkestrering av klassrumskommunikationen en mycket komplex aktivitet. Förutom att avsätta rimlig tid för att diskutera problemen måste läraren också avgöra vilka aspekter av problemet som särskilt skall betonas. Hur ska elevernas arbete organiseras och iscensättas, vilka frågor ska ställas för att elever ska utmanas med olika kunskaper? Hur ska elever stöttas utan lotsning som tar bort utmaningen (NCTM, 2000, s 19). Annorlunda uttryckt, det är viktigt att lärare tillhandahåller tillräckligt med stöd för elevernas matematiska aktiviteter, men inte så mycket stöd att läraren själv utför tankeprocesserna åt eleverna (t ex Ball, 1993; Lampert, 1985; Hiebert m fl, 1997). Det finns dock inga forskningsbaserade riktlinjer för hur lärare skall uppnå en lämplig balans mellan lärarledd och handledd undervisning, och troligen kommer forskningen aldrig att kunna tillhandahålla några sådana riktlinjer av generell karaktär.

Lärare behöver inte bara specifika idéer om hur de skall lära sig att agera i klassrummet utan också konkreta exempel som kan vägleda dem i deras praktik. Vi behöver dokumentera hur undervisning genom problemlösning kan se ut, hur lämpliga matematiska problem kan väljas och hur klassrumskommunikationen och samtalen kan organiseras för att på ett lämpligt sätt engagera elever i matematikproblem (Ball & Bass, 2000).

Ett exempel på en klassrumsaktivitet

I klass 7 och 8 (12 – 13 år) i amerikanska skolor är det vanligt att elever lär sig beräkna area och volym av tredimensionella kroppar. I traditionell undervisning får eleverna helt enkelt formlerna för area och volym hos vanligt förekommande kroppar som kub och cylinder. De uppmanas att använda dessa formler för att finna area och volym av olika objekt med givna dimensioner. Liten eller ingen uppmärksamhet ges dock till att fundera över relationen mellan arean och volymen hos objekten. I följande aktivitet ges ett förslag till undervisning genom problemlösning för att engagera elever i utforskandet av relationen mellan volymen av olika ”rör”. Vi använder termen rör för en cylinder utan lock och botten och använder termen rörets volym för den volym som bildas av röret och dess tänkta botten- och lockytor. Vi håller rörets area konstant och studerar volymen genom att genomföra ett experiment där hypoteser formuleras och testas [3].

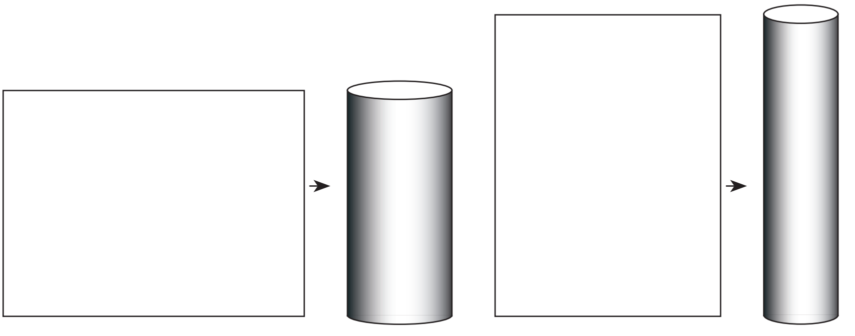
[3] En utmanande utvidgning av aktiviteten är att undersöka kopplingen mellan den totala cylinderarean och cylinderns volym, eftersom cylinderns area per definition inkluderar summan av mantelarean ocharean av lock och botten. Vi diskuterar denna utvidgning kortfattat i slutet av denna del.

Material

Pappersark till varje grupp, ris eller fågelfrön, sax, linjal, tejp och ett decilitermått per grupp.

Elevers arbete – Fas 1

Låt eleverna rulla två A4-ark. Använd tejpen och arken för att konstruera två rör, ett som är 21 cm högt och ett som är 30 cm högt, dvs de hela arken rullas ihop på två olika sätt.



Ställ sedan följande fråga till eleverna som arbetar i grupper (3–4 elever):

Rymmer det ena röret mer än det andra eller rymmer de lika mycket? Skriv ned era hypoteser på ett separat papper och diskutera era idéer med era klasskamrater.

Föreslå att det högre röret placeras inuti det kortare och fyll detta med ris. Tag sedan bort det högre röret och låt riset rinna ut i det lägre röret. Fråga sedan:

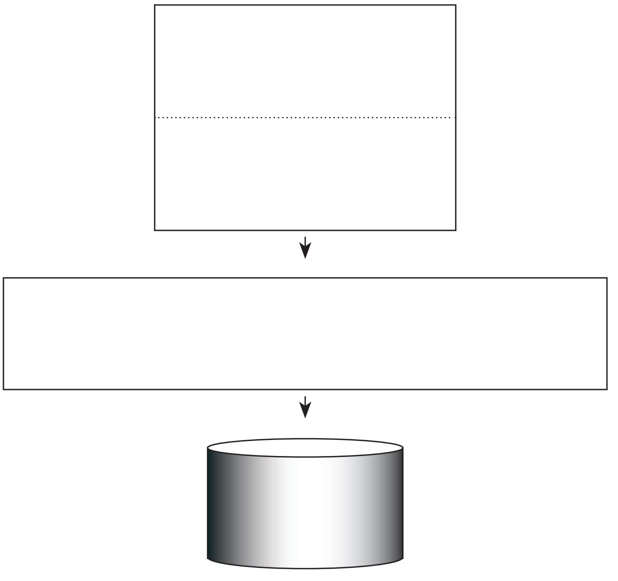
Vad upptäckte ni? Hur förklarar ni er upptäckt?

Uppmuntra eleverna att diskutera hur rörets dimensioner bidrar till olika volymer.

→

Elevers arbete – Fas 2

Ta bort tejpen från ett rör och lägg ned arket på bordet. Klipp sedan isär arket på mitten och lägg ena delen bredvid den andra enligt nedan. Tejpa ihop de två delarna så att ett nytt rör skapas. Upprepa försöket där riset hälls i det högre röret efter att de har placerats i det lägre röret.



Vad händer denna gång? Vad förväntade ni er? Hur förhåller sig mängden ris i detta nya rör till mängden i de två första rören?

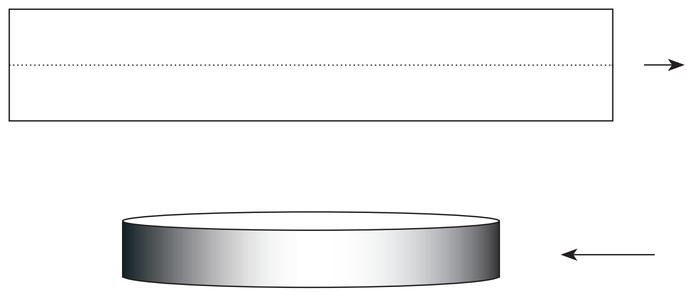
Upprepa experimentet där riset hälls i det högre röret och placeras inuti det lägre röret.

Vad händer denna gång? Var det vad ni förväntade er? Hur förhåller sig mängden ris i detta nya rör till mängden i de två första rören?

Upprepa igen!

→

Vad skulle hända om du klippte isär röret på mitten och konstruerade ett nytt? Hur skulle volymen ändras?



Frågor att diskutera

Be eleverna att fundera över experimentet som de genomfört och därefter skriva förklaringar till resultaten. Låt dem resonera kring vad som händer med volymen hos röret om vi fortsätter att göra det lägre och lägre (och bredare och bredare).

Utvidgning av aktiviteten

Diskutera med eleverna varför $V = \pi r^2 h$ är en rimlig formel för ett rörs volym och varför $A = 2\pi r h$ är en rimlig formel för rörets mantelarea. Be dem använda dessa formler för att förklara utfallet av experimentet. Kanske några elever blir intresserade av att undersöka vad som händer när man fortsätter att dela röret på mitten. Uppmuntra dessa elever att skapa en tabell med dimensioner och volymer och att söka efter ett mönster i relationen mellan dessa.

En mer avancerad utvidgning av aktiviteten är att undersöka förhållandet mellan den totala arean och volymen hos en cylinder, istället för hos röret. Resultaten kommer att skilja sig åt. Båda undersökningarna leder till ett icke-intuitivt matematiskt faktum: Objekt med samma area kan ha olika volym. För en cylinder upptäcker vi att den mest "effektiva" formen, alltså den form som ger maximal volym för en given area, ges av $h = 2r$. Om en cylinder med samma area är högre eller lägre kommer volymen att bli mindre. Tanken att det finns en maximal volym för cylindern (men inte för röret) är ytterligt intressant och leder till många relevanta och verklighetsanknutna tillämpningar i vetenskap och vardagsliv.

Förslag till vidare läsning om denna aktivitet

Några intressanta variationer av den ovan beskrivna aktiviteten finns på följande webbsidor (tillgängliga 2006-05-30):

– http://www.shodor.org/interactivate/activities/sa_volume/index.html

– http://teachertech.rice.edu/Participants/sboone/Lessons/Titles/cylinder.html

Referenser

Ball, D.L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93*, 373–397.

Ball, D.L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. I J. Boaler (Red), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (s 83–104). Westport: Ablex.

Borko, H. & Putman, R.T. (1996). Learning to teach. I D. C. Berliner & R. C. Calfee (Red), *Handbook of educational psychology* (s 673–708). New York: Macmillan.

Bransford, J.D., Brown, A.L. & Cocking, R.R. (Red). (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. I F.K. Lester & R.I. Charles (Red), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten – grade 6* (s 241–253). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B. & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 3–29.

Cohen, D.K. (1990). A revolution in one classroom: The case of Mrs. Oublier. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *12*, 263–276.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, *23*, 167–180.

Greeno, J.G. & Goldman, S.V., (Red). (1998). *Thinking practice in mathematics and science learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Henningsen, M.A. & Stein, M.K. (1997). Mathematical tasks and students' cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning." *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 524–549.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learing and teaching with understanding. I D. A. Grouws (Red), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s 65–97). New York: Macmillan.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Human, P., Murray, H. & Olivier, A. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hiebert, J. & Wearne. D. (1993). Instructional task, classroom discourse, and students' learning in second grade. *American Educational Research Journal*, *30*, 393–425.

Lambdin, D.V. (2003). Benefits of teaching through problem solving. I F.K. Lester & R.I. Charles (Red), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten – grade 6* (s 3–13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lampert, M. (1985). How do teachers manage to teach? *Harvard Educational Review, 55*, 178–194.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*, 29–63.

Lappan, G. & Phillips. E. (1998). Teaching and learning in the Connected Mathematics Project. I L. Leutzinger (Red), *Mathematics in the middle* (s 83–92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F.K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970 – 1994. *Journal for Research in Mathematics Education* (special 25th anniversary issue), *25*, 660–675.

Lester, F.K. & Charles, R.I. (Red). (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten – grade 6*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Paine, L. & Ma, L. (1994). Teachers working together: A dialogue on organizational and cultural perspectives of Chinese teachers. *International Journal of Educational Research*, *19*, 675–698.

Perry, M., VanderStoep, S.W. & Yu, S.L. (1993). Asking questions in first-grade mathematics classes: Potential influences on mathematical thought. *Journal of Educational Psychology*, *85*, 31– 40.

Schoen, H.L. & Charles, R.I. (Red). (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6 –12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shimahara, N. & Sakai, A. (1995). *Learning to teach in two cultures: Japan and the United States*. New York: Garland.

Stein, M.K., Grover, B.W. & Henningsen, M.A. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*, 455–488.

Stein, M.K., Smith, M.S. & Silver, E.A. (1999). The development of professional developers. *Harvard Educational Review*, *69*, 237–269.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

Van de Walle, J. (2001). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.* Boston, MA: Allyn and Bacon.

Van de Walle, J. (2003). Designing and selecting problem-based tasks. I F. K. Lester & R. I. Charles (Red), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten – grade 6* (s 67–80). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Strategier för problemlösning och bevis

ALAN BELL, HUGH BURKHARDT, RITA CRUST,
DANIEL PEAD & MALCOLM SWAN

Att undervisa i matematiska färdigheter utan att relatera till hur dessa kan användas i meningsfulla sammanhang har en lång tradition bakom sig. Det hela skulle kunna jämföras med att man skulle ha en kurs i träslöjd där eleverna fick lära sig att använda hammare, stämjärn, sågar och hyvlar men inte någonsin få rita eller tillverka något, t ex en möbel. Numer lägger dock kursplaner i alla ämnen alltmer tonvikt på processer där elever tillägnar sig kunskaper, och har följaktligen mer fokus på konkret problemlösning, bevisföring och undersökande aktiviteter. I denna artikel kommer vi först att etablera en grund – en struktur – som kan användas för att ställa diagnos på vad inom dessa områden som man behöver undervisa mer om. Därefter följer hur en sådan undervisning kan planeras på lämpligt sätt. Slutligen beskrivs forskning kring elevers lärande rörande dessa bevis- och problemlösningsprocesser och till sist visas några exempel på klassrumsaktiviteter som kan stödja elevernas utveckling.

Diagnostiserande och påverkande undervisning

I en tidigare artikel av Bell (1993a) föreslås generella principer för undervisningsplanering och där diskuteras även planeringens psykologiska grundvalar. I en besläktad artikel (Bell, 1993b) rapporteras om klassrumsexperiment där man utprövat dessa principer. Experimenten rörde ett antal mycket spridda missuppfattningar inom aritmetik och geometri, som till exempel att ”multiplikation gör större”, att division alltid måste vara ett större tal genom ett mindre, eller att en spegling måste flytta en figur antingen horisontellt eller vertikalt.

Den undervisningsmetod Bell förespråkade, och som han kallar den ”diagnostiska och påverkande metoden”, bestod av att ge uppgifter som provocerade fram en medvetenhet om att det rådde en konflikt mellan de korrekta lösningarna och olika slags missuppfattningar och att sen leda en intensiv diskussion för att lösa konflikten. I sina experiment fann han att denna ”konfliktdiskussionsmetod”, med samma undervisningstid som en mer typisk undervisningsmetod, åstadkom resultat nästan utan ”glömskeeffekt” efter två månader. Den sedvanliga metoden gav ett initialt resultat på ungefär samma nivå, men en avsevärd ”glömskeeffekt” efter två månader.

Den diagnostiska och påverkande metodens tre huvuddrag:

- *Att få intensiv erfarenhet* av nyckelbegreppet och att avslöja missförståndet (förutsatt att det förekommer).
- *Att benämna* begreppet.
- *Att reflektera* över hur begreppet tillämpas i situationen, hur man tillämpar det korrekt och vilka misstag man ska undvika.

Det är rimligt att anta att i stort sett samma principer är tillämpliga vid lärandet av olika strategier, och detta överensstämmer i själva verket med resultaten från långt tidigare forskning kring undervisning om allmänna problemlösningsstrategier. Dock med förbehållet att strategierna inte utan vidare kan överföras till andra kontexter. Strukturen för planering av lärande av problemlösnings- och bevisstrategier innehåller följande sex steg:

- *Diagnostisering* med hjälp av ett antal relevanta uppgifter.
- *Identifiering* och *benämning* av de nödvändiga strategierna.
- Elevarbete med uppsättningar av *uppgifter* som var och en initialt *fokuserar* på en aspekt av den önskvärda strategin.
- Hjälp i form av ett *referensark med en lista på de strategiska steg* som ska tas.
- *Reflektion* över hur strategierna är tillämpliga på det aktuella problemet.
- En sekvens *ytterligare uppgifter*, som bearbetas på samma sätt, där det blir allt svårare att hitta rätt strategi och veta hur den ska tillämpas.

I det följande kommer vi att illustrera denna process i sex steg genom att först tillämpa den i förkortad form på bevisprocessen, därefter i sin helhet på det vidare området generell problemlösning.

Diagnos och svar då eleven lär sig att bevisa

Bevisprocessen, i matematik eller naturvetenskap, blir aktuell när man i någon situation observerar ett mönster eller en regelbundenhet som kan ge ny insikt, och då man önskar att bekräfta eller förklara detta. Detta kräver att man först utforskar situationen med tillräcklig noggrannhet och konsekvens för att observera det regelbundna och formulerar dess karaktär tillräckligt precist för att den ska kunna testas. Därefter söker man de villkor som ger upphov till regelbundenheten och de exempel där den är tillämplig.

I elevernas arbete med matematik ligger vanligen den första svårigheten i att förstå det nödvändiga i att ta fram alla de fall där mönstret är tillämpligt och att testa alla dessa helt och hållet. Sedan kommer svårigheten med att kunna formulera ett argument som utgår från påståenden som man kommit överens om är grundläggande, och som sedan tillsammans ska ge en lämplig slutsats. I typiska fall måste utgångspunkten ligga i problemformuleringen; när elever till exempel ska utveckla ett mönster i en talföljd utgår de ofta från att det mönster de kan observera för de första talen måste fortsätta, och inser inte att de måste finna de regler som definierar sekvensen.

I vår tidigare forskning, (Bell, 1976a; 1976b; 1979) försökte en blandad grupp med 15-åringar lösa tio problem som vart och ett ledde till en enkel generalisering. I vissa fall skulle de hitta och bevisa generaliseringen, i andra var den given och skulle bekräftas eller motbevisas. Tre av dessa problem – *Vända mynt*, *Lägga till och ta bort* och *Lägga till en nolla* – kommer att diskuteras här, med exempel på hur eleverna svarat.

Uppgiften i *Vända mynt* innebär att formulera ett övertygande argument för att något är omöjligt i ett enkelt spel – sådana situationer är bra för att diskutera vad som verkligen är ett bevis. *Lägga till och ta bort* belyser skillnaden mellan att kontrollera några enstaka fall och ett generellt resonemang, och mellan en förklaring och en ”allmän omformulering” av problemet. *Lägga till en nolla* lyfter fram huvudpoängerna i de två föregående exemplen med hjälp av en bekant princip.

Vända mynt

Detta är ett spel där man vänder mynt, men det spelas med papper och penna. Det finns tre mynt, och ett drag består i att man måste vända två mynt, vilka som helst. Uppgiften är att gå från tre klave till tre krona med hjälp av så många drag du vill.

Bokför dina drag så här:

Klave	Klave	Klave
Krona	Krona	Klave
Klave	Krona	Krona ... och så vidare

Om du lyckas med detta, visa en lista på dina drag. Om du tror att det är omöjligt, förklara varför.

Ett lyckat svar på detta problem är beroende av insikten att det dels finns definierat ett begränsat antal möjligheter, dels att identifiera dessa (dvs 0, 1, 2 eller 3 krona). På den lägsta svarsnivån missade elever den första av dessa insikter. En elev sade:

> *Det är omöjligt för när man vänder en klave så får man fler kronor, och när man vänder en krona så har man inte tillräckligt många.*

Detta identifierar inte någon bestämd uppsättning möjligheter. Som kontrast uttrycker följande svar definitivt, om än lite mångordigt, det faktum att trots att dragen kan fortsätta ”i evighet” så är antalet möjliga tillstånd låst, och man kan bara få tre klave eller två kronor och en klave.

> *Jag tror inte det här är möjligt eftersom det enda möjliga draget gör att man får två kronor. Det enda sättet att komma ur det är att gå tillbaka till tre kronor, men efter det skulle man få två kronor och en klave igen. Så kan det hålla på i evighet.*

Vända mynt kan varieras genom att man ändrar antalet mynt eller det antal som ska vändas. Det kan bidra till att bygga upp en känsla för den speciella säkerhet som man kan få med hjälp av ett matematiskt bevis.

Lägga till och ta bort

Välj vilket tal som helst mellan 1 och 10. Addera 10 till det talet och skriv ned svaret. Ta sedan 10 och subtrahera med samma tal och skriv ned svaret. Lägg ihop dina två svar.

- Kommer resultatet att bli detsamma för alla tal man startar med?
- Förklara varför ditt svar är korrekt.

I ett typiskt svar väljer eleven några tal och svarar sedan ”ja”. Den springande punkten i en förklaring är insikten att samma tal både adderas och subtraheras, så att de tar ut varandra och bara de två tiorna blir kvar som slutresultat. Ett bra svar skulle beskriva processen i algebraiska termer, $(10 + x) + (10 - x)$, men nästan inga elever gjorde detta. Många ”förklaringar”, såsom de följande, var helt enkelt omformuleringar av proceduren, utan några förklarande kvaliteter.

> *Resultatet blir samma hela tiden. Om man väljer ett tal mellan 1 och 10, lägger det till 10 och skriver ner svaret och sedan om man tar bort det första talet från 10 så blir det som behövs för att det ska bli 20.*

Lägga till en nolla

Om man vill multiplicera med tio kan man lägga till en nolla, till exempel $243 \times 10 = 2430$.

- Är detta sant för alla heltal?
- Förklara varför ditt svar är korrekt.

Lägga till en nolla visar på svårigheten att förklara en redan välkänd generalisering. Detta kräver att man hänvisar till positionssystemet och betänker effekten av att man flyttar varje siffra till en plats där dess värde blir tio gånger större. Många elever ger bara andra exempel och återupprepar principen, utan någon medvetenhet om hur detta kan följa av mer fundamentala principer.

> *Ja, det är sant, eftersom vilka heltal man än* × *med* 10 *lägger man bara till en* 0.
> *Till exempel* $100\,146 \times 10 = 1\,001\,460$
> $4\,766\,429 \times 10 = 47\,664\,290$
> $276\,428 \times 10 = 2\,764\,280$
> *Därför tror jag att jag har rätt.*

Nästa svar uppvisar en viss kunskap om vad en förklaring är och eleven försöker att ge en, men genom att hänvisa till innebörden av multiplikation används den algoritm man skulle förklara och därigenom uppstår ett cirkelresonemang.

> *Ja, det är sant för alla heltal. Ett exempel på mitt svar är:* Om man multip*licerar denna summa med 1; det vill säga*, $208 \times 1 = 208$. *Multiplicera sedan detta med* 10*; då måste man göra svaret* 10 *gånger större. Jag ska visa hur vi gör detta.*

$$\begin{array}{r} 208 \\ \underline{10} \\ 000 \\ \underline{2080} \\ 2080 \end{array}$$

> *Först tar vi* 0×8, *sedan* 0×0, *och sedan* 0×2, *då får vi bara* 0 *men den andra raden multiplicerar vi med tio, så i den första kolumnen måste vi sätta in en nolla.*
> *För* 10× *vilket tal som helst kan aldrig någonsin bli mindre än* 10.

Slutsatser av forskningsresultaten

De samlade resultaten var som följer (15-åringar, alla prestationsnivåer):

- 18% misslyckades med att nå något intressant resultat.
- 25% testade för ett begränsat antal tal och accepterade detta som bekräftelse av slutsatsen.
- 35% gjorde vissa försök, utan att lyckas, att ge en generell förklaring till slutsatsen. Vissa var allmänna omformuleringar av problemet, utan tillägg av någon förklarande natur; andra uttryckte synpunkter som möjligen var relevanta, men inte på något sammanhängande sätt. Andra klarade inte att avgöra vad som kunde vara lämpliga utgångspunkter för ett resonemang:
- 21% gav en viss grad av sammanhängande förklaringar.

Klassrumsaktiviteter från forskningen

Ovanstående uppgifter och variationer av dem kan användas i klassrummet för att utveckla olika aspekter av bevisföring. Ge eleverna en av uppgifterna; be dem att skriva ned sina svar, låt dem sedan byta papper med sin partner så att de kan kritisera varandras svar. Låt detta följas av diskussion och identifiering av korrekta och felaktiga svar, och benämn dem som ovan för att gardera mot fel. Ge sedan några liknande problem. Använd därefter olika uppgifter på liknande sätt för att belysa aspekterna ovan. Ge slutligen en blandad uppsättning som kräver att de väljer den mest lämpliga ansatsen.

Problemlösning i matematik, naturvetenskap och teknik

Vi går nu vidare till *generella problemlösningsstrategier*. Eftersom strategier som lärts i ett sammanhang inte är enkla att överföra till andra, bör spännvidden i de uppgifter där vi syftar till att utveckla denna kompetens vara så bred som möjligt. Vårt eget intresse har på senare tid inriktats mot utmanande uppgifter för begåvade elever. Det kan vara olika sammanhang som berör elevers intresse, (i eller utanför skolan), baserade på begreppsliga områden inom matematik, naturvetenskap och teknologi. Som en del av den brittiska regeringens *World Class Arena-projekt* har vi utvecklat tester och undervisningsmaterial inom detta område. Testen vänder sig till högpresterande elever i åldrarna 9 till 13 år och innehåller såväl papper-och-penna-baserade som datorbaserade uppgifter (Burkhardt & Pead, 2002).

Från början utformades uppgifterna helt enkelt för att vara utmanande och intressanta för de berörda eleverna, utan förutfattade meningar om vilka speciella strategier de skulle kunna locka fram, för att få största möjliga bredd och autenticitet i samlingen. Efter en del reflektion kunde vi formulera en struktur inom området som möjliggjorde avvägningar mellan de olika uppgiftstyper som valdes ut till ett test. Strukturen identifierar en uppsättning karakteristiska *uppgiftstyper* (Burkhardt & Bell, 2002) och anger dimensioner som begreppsligt innehåll, omfattning, öppenhet och hur praktiska de var.

I korthet finns två stora grupper av uppgiftstyper: *Handlingsuppgifter* och *insiktsuppgifter*. Handlingsuppgifter fokuserar på *utformning eller planering, utvärdering, optimering och urval*. Insiktsuppgifter handlar primärt om att *hitta samband, dra slutledningar från modeller, skattning, förutsägelser, tolkning och representation* samt *översyn och kritik*. Ett urval uppgifter av varje typ återfinns senare i artikeln.

Diagnos av testresultaten

Av utrymmesskäl kan vi här inte föra en utförlig diskussion om resultaten av vår analys av elevernas testresultat. Istället ställett ger vi en kort sammanfattning av de viktigaste rönen. Se Swan och Bell (2002) för en fullständig redovisning av resultaten.

Förklara och verifiera

Eleverna klarar uppgifter som kräver ”intuitiva” resonemang bättre än man kunde förvänta sig, medan förklaringar och motiveringar är bristfälliga. Fullständighet och stringens i kontroll eller resonemang är sällsynta. Se nästa avsnitt: *Kubkalendern*, *Äpplen*, *bananer och päron*, *Ormar och stegar* och *Röstresultat*.

Att använda representationer

Att avläsa vanliga tabeller och grafer går bra, men det går sämre när det krävs en koordination av aspekter (som att förstå betydelsen av en kurvas lutning) eller när tabelltypen inte är bekant. Det är ovanligt med spontan användning av systematiska tabeller eller diagram, även när det är nödvändigt för att kunna lösa uppgiften, se *Fotvandring* och *Ägg*.

Att ställa upp och testa hypoteser och generaliseringar

Att testa en föreslagen vetenskaplig hypotes mot givna experimentella bevis går i allmänhet bra, men att ställa upp en hypotes eller en matematisk generalisering med utgångspunkt från data, eller att formulera dem, är mycket svårare, speciellt för nioåringarna, se *Vågen*.

Modellera, uppskatta och förutsäga

Det innebär en svårighet att välja en lämplig matematisk eller vetenskaplig modell för en praktisk situation, något som i sig är vanligt, men inte vanligen undersökt på detta sätt, se *Tidningen*.

Klassrumsaktiviteter för problemlösning

Följande förslag till undervisning i problemlösning grundar sig på utprövning av en uppsättning lektionsmoduler som har anknytning till vår forskning (Bell m fl, 2005). De visar hur principerna och diagnosen som beskrivs ovan har omsatts i undervisningsmaterial och hur strategiinlärning ställer vissa krav på lektionens struktur och undervisningsmetoden.

Problemlösning handlar om att ge sig i kast med en uppgift som inte är av rutinkaraktär och som är obekant för eleven i några avseenden. Detta innebär att man måste fatta beslut om vad man ska göra och när man ska göra det, liksom att genomföra hela lösningsprocessen. När man hjälper elever som arbetar med problem som inte är av rutinkaraktär är det nödvändigt med ganska annorlunda undervisningsstrategier. Man undviker att ge specifika förslag eller att bryta ner problemet i delar. Man använder ofta allmänna vinkar som *Vad har du provat? Vad tror du?* och mera sällan vinkar om vilken av de aktuella strategierna eller taktikerna de skulle kunna använda, såsom *Hur kan vi organisera detta? Har du provat med ett enkelt fall?* Likaså är det bäst att hantera diskussionen i klassrummet på ett icke-styrande sätt, genom att i huvudsak vara ordförande eller handledare, ibland frågeställare eller provokatör, aldrig domare eller bedömare. Detta gör att eleverna får ta ansvar för sitt eget arbete.

En lämplig lektionsplanering:

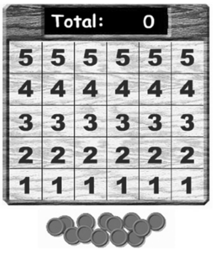
- Varje lektion börjar med *en uppgift – ett problem* – som ställer krav på någon av de önskvärda strategierna, och denna diskuteras i par av eleverna. De antecknar sina idéer och lösningar individuellt.
- Några *exempel på elevsvar* ges; eleverna diskuterar dessa, först parvis och sedan i helklass. Läraren sammanfattar slutsatserna, benämner strategierna och listar de steg som tas.
- En *andra uppgift* ges samt ett ark med strategiska vinkar som kommit fram under diskussionen. Eleverna arbetar med detta i par, därefter individuellt.
- Slutligen samlar läraren upp elevernas idéer muntligt och relaterar deras arbete till de strategiska vinkarna.
- Ytterligare lektioner behandlar olika aspekter av strategin eller tillämpar den i nya sammanhang.

Var och en av uppgifterna i aktivitetsavdelningen kan på detta sätt utvecklas till lektioner i problemlösning. För att illustrera detta visar vi först de nödvändiga materialen för en lektion i *förklara och motivera*. För att ge den intensitet i erfarenheten som krävs för att etablera strategin bör följande frågor återkomma genom hela lektionen:

- Hur kan jag vara säker på att … ?
- Hur vet jag att detta alltid är sant … ?
- Hur vet jag att denna uppgift är omöjlig … ?

20-spelet

Detta är ett spel för två personer.



- Spelarna turas om att täcka ett tal på brädet med en bricka.
- De täckta talen adderas efter hand.
- Den spelare som först kommer till exakt 20 vinner.

1 Spela spelet några gånger mot datorn eller med en partner med riktiga brickor och ett bräde.

2 Försök hitta en vinnande strategi. Förklara hur du kan vara säker på att din strategi alltid fungerar

3 Försök nu modifiera spelet något. Till exempel: Anta att först till 20 förlorar och att ingen överhoppning är tillåten, eller anta att du bara får välja ett tal mellan 2 och 5, eller osv.

Analysera din egen version av spelet.

Vinnarstrategier

Allmän strategi	Speciell taktik
Förstå problemet	Spela spelet några gånger tills du verkligen förstår det.
Arbeta systematiskt	Bokför dina spel. Efter ett tag, stanna upp och tänk efter: Finns det en vinnarstrategi?
Leta efter mönster och ställ upp hypoteser	Finns det några positioner från vilka du tror att du alltid kan vinna? Finns det positioner från vilka du alltid kan nå dessa vinnarpositioner?
Försök bevisa hypoteserna	Se på dina hypoteser och försök bestämma om de är sanna eller inte. Skriv ner ditt resonemang klart och utförligt. Förklara ”Hur man vinner detta spel.”
Kontrollera dina bevis	Låt någon annan läsa dina förklaringar. Kan de hitta några ”hål” i ditt resonemang, eller är det vattentätt? Kan de hitta några sätt att förbättra din förklaring? Försök besegra någon som spelar enligt din metod. Kan du övertyga dem om att metoden fungerar? Skriv om din förklaring.
Utveckla spelet på nya sätt	Förändra reglerna för att göra spelet lite intressantare. Kan du fortfarande hitta en vinnarstrategi?

Svar att diskutera

1 Spela 4 för vart de än går och om du spelar smart kan du få dem att fastna på 14.

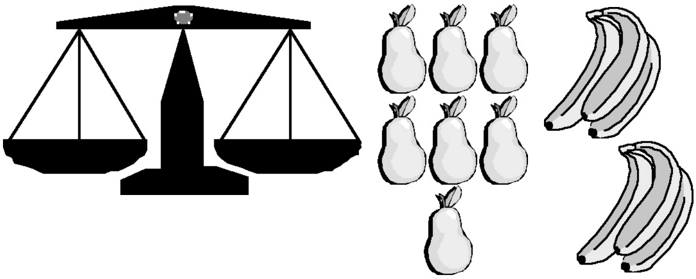
2 Ta 5 för vad de än väljer blir det 10 eller mindre än 10. Sen behöver man bara se till att vara den som hamnar på 14.

3 Jag skulle placera brickan på 1. Det mesta datorn kan göra är 6. Nästa gång skulle jag komma upp i 8 och sedan 14. Så länge man kan hitta ett sätt att komma till 14 kan man alltid fånga den andra spelaren.

4 Jag tänker vinna genom att placera den på 2 för vad de än gör kan de inte få summan 8 men det kan jag när det är min tur.

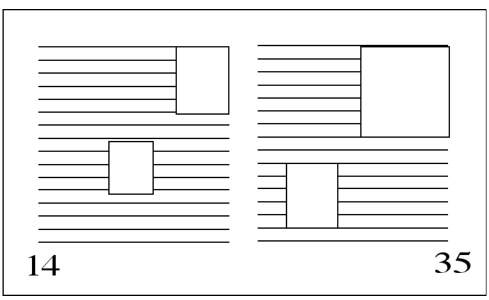
5 Kom alltid till 14 först.

Äpplen, bananer och päron

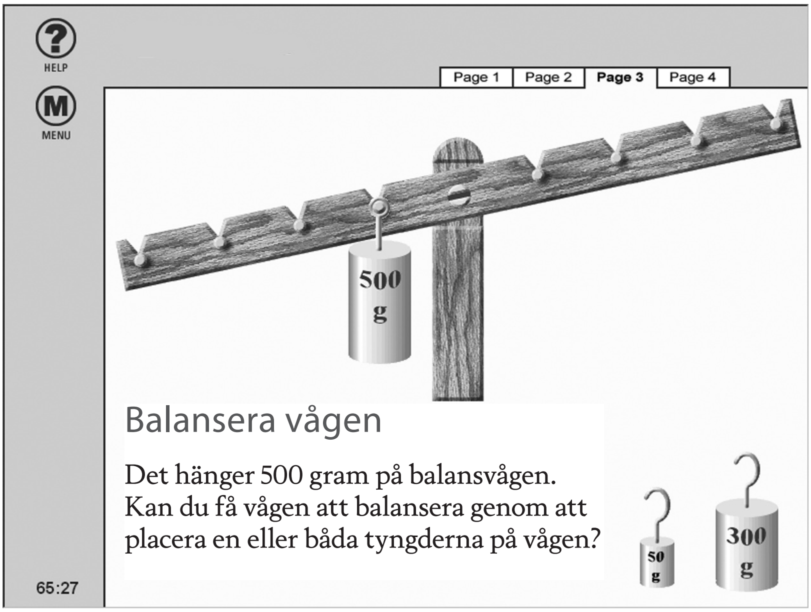


Tom jämför vikten på äpplen, bananer och päron. Han kommer fram till att sju päron väger lika mycket som fyra bananer och fem bananer väger lika mycket som sex äpplen.
Vilken enskild frukt väger mest?
Vilken väger minst?
Visa hur du kom fram till det.

Tidningen



Tidningar görs av en bunt stora pappersark vikta på mitten. Detta ensamma ark föll ut ur en tidning.
Hur många sidor var det i hela tidningen? Beskriv vilken metod du använder för att bestämma det.
Anta att sidnumren i stället för 14 och 35 kallas för x och y. Skriv ner formeln för antalet sidor i hela tidningen.



Kubkalender

Lisa gör en skrivbordskalender av två kuber. De två framåtvända sidoytorna visar datum, som kan gå från 01, 02, 03 upp till 31.

1 Hur ska hon numrera kuberna för att visa alla datum: 01 till 31? (Du kan byta den svarta och den vita kubens positioner om du vill.)

2 Sam vill göra en kalender som räknar veckor genom att märka två kuber som kan visa alla tal från 01 till 52. Förklara tydligt hur du vet att Sam inte kan göra detta.

Fotvandringen

Alec planerar en fotvandring genom fem byar. Han kommer att börja och sluta i Braxton.

Här är en tabell som visar gångavståndet i kilometer mellan de fem byarna. Avståndet mellan Castledown och Faxton är till exempel 19 kilometer. Ett streck (–) betyder att det inte finns någon direkt väg mellan byarna.

Braxton				
—	Castledown			
9	6	Elbury		
10	8	5	Leakton	
8	19	15	—	Faxton

Skissa ett diagram som visar byarna, vägarna och avstånden.

Vilken är den kortaste rutt som börjar och slutar i Braxton och passerar alla fem byarna? Visa hur du vet att din rutt är den kortast möjliga.

Äggen

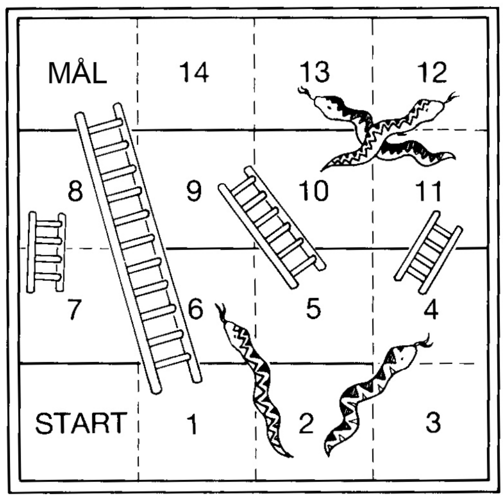
Fru Newman har fem barn. Tre av dem är flickor och två är pojkar. Barnen köper chokladägg som de ska ge varandra. Varje flicka ger varje pojke ett rött ägg. Varje flicka ger var och en av de andra flickorna ett blått ägg. Varje pojke ger varje flicka ett gult ägg. Varje pojke ger var och en av de andra pojkarna ett grönt ägg.

Hur många ägg av varje färg köper barnen? Visa hur du får fram svaret.

Barnen som bor granne använder samma regler för att ge varandra ägg. De köper 8 röda ägg, 8 gula ägg, 2 blå ägg och 12 gröna ägg. Hur många flickor och pojkar bor det i grannhuset? Visa hur du kommer fram till svaret.

Ormar och stegar

Läs följande beskrivning av ett spel och svara sedan på frågorna nedan. Detta är ett spel för två spelare. Ni behöver ett mynt och två pjäser.



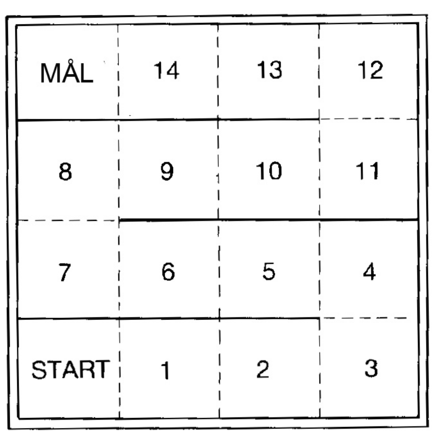
Regler

- Turas om att singla slanten. Om det blir krona, flytta pjäsen 2 steg framåt. Om det blir klave, flytta 1 steg framåt.
- Om du kommer till foten av en stege måste du uppför den. Om du kommer till huvudet på en orm måste du nedför ormen.
- Vinnare är den första spelare som kommer till ”MÅL”.

1 Antag att du först får krona, sedan klave och därefter krona. Var är din pjäs nu?

2 Lista och beskriv alla de fel som du upptäcker på brädet.

3 Gör ett bra spel på det tomma brädet nedan med 3 ormar och 3 stegar.



Röstresultat

Barnen i Mr Kirbys klass röstade på sina favoritböcker under de tre senaste månaderna. Böckerna var:

Babe, the Gallant Pig – Sarah, Plain and Tall – Stone Fox

Här är några ledtrådar om hur de röstade.

- 34 barn röstade. Den vinnande boken fick flest röster, men den fick mindre än hälften av rösterna.
- Andraplatsen delades av två böcker.

Hitta alla sätt som rösterna kan ha givits till de tre böckerna.

Referenser

Bell, A. (1976a). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23–40.

Bell, A. (1976b). *The learning of general mathematical strategies*. University of Nottingham, UK: Shell Centre.

Bell, A. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 361–387.

Bell, A. (1993a). Principles for the design of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 5–34.

Bell, A, (1993b). Some experiments in diagnostic teaching, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 115–137.

Bell, A. & Burkhardt, H. (2002, april). *Domain frameworks in mathematics and problem solving*. Bidrag presenterat vid AERA, New Orleans, LA. Tillgänglig 20060512 på www.nottingham.ac.uk/education/MARS/papers/.

Burkhardt, H. & Pead, D. (2002, april). *Computer-based assessment: A platform for better tests?* Bidrag presenterat vid AERA, New Orleans, LA. Tillgänglig 20060512 på www.nottingham.ac.uk/education/MARS/papers/.

MARS/Shell Centre (2004a). *Developing Problem Solving. For 8–11 year olds: Generalising: finding pattern and relationships. Representing: using diagrams, tables and graphs. Making sense of evidence: finding relationships in data*. London: NFER/Nelson.

MARS/Shell Centre (2004b). *Developing Problem Solving. For 12–14 year-olds. Optimising: making the best of limited resources. Making sure: reasoning and proving. Modelling: finding relationships in data*. London: NFER/Nelson.

Swan, M. & Bell, A. (2002). *Assessing problem solving: Characteristics of student performance on paperbased and computer-based tasks*. Bidrag presenterat vid AERA, New Orleans, LA. Tillgänglig 20060512 på www.nottingham.ac.uk/education/MARS/papers/.

Geometri på rutat papper

DARINA JIROTKOVÁ

I artikeln visar jag hur det är möjligt att genom ett flertal delupptäckter vägleda elever fram till djupare upptäckter i geometri. En av dessa är metoden för att bestämma alla pythagoreiska tripplar genom att använda enkla konstruktioner på rutnätspapper. Uttryckt i algebraiska termer så letar vi efter alla heltalslösningar till $x^2+y^2=z^2$. Tonvikten ligger på ett konstruktivistiskt förhållningssätt. Studien baserades på en serie experiment som genomfördes med elever i olika åldrar och med lärarstuderande. Målet med denna forskning är att utveckla och styra elevers upptäcktsprocesser. Detta kan ge dem möjlighet att känna framgångens glädje och tillfredsställelsen i att göra små och stora upptäckter, att utveckla sitt tänkande om orsakssamband och ge dem insikter i aritmetikens och geometrins strukturer, i synnerhet kopplingarna mellan dessa. I slutet av artikeln finns ett antal uppgifter som kan användas med elever i grundskolans tidigare del.

Sedan 1990, när det blev möjligt att förändra kursplanerna vid Fakulteten för undervisning i Prag, har geometrikursen för blivande lärare i det som motsvarar svensk grundskolas tidigare år[1] genomgått stora förändringar med avseende på innehåll och begreppsbildning.

Skälen till att dessa förändringar genomfördes var det rådande missnöjet med den gällande kursen i geometri. Dessutom var vi övertygade om att det som avgör kvaliteten i det pedagogiska arbetet inte bara är studenternas ämneskunskaper eller vad de har presterat i examinationer, utan även deras attityd till matematik och till elever, deras intellektuella självförtroende, baserat på

[1] I Tjeckien studerar dessa blivande lärare i 5 år, om de även väljer att studera ett främmande språk, vilket leder till magisterexamen. De studerar alla skolans ämnen, och tiden som avsätts för matematik är i genomsnitt 2,5 timmar per vecka under 7 terminer. Här ingår kurser i aritmetik, geometri och didaktik. Blivande gymnasielärare i matematik studerar ämnet i 5 år med ungefär 8 timmar per vecka i olika delområden. De väljer också ett andra ämne som de studerar parallellt med matematik.

kvalitativt tänkande och förståelse för de mekanismer som avgör elevers matematiska beteende och utveckling.

Efter flera års aktionsforskning, 1994–2000, under ledning av M. Hejný, beslöts att de traditionella målen i geometrikursen skulle slopas. Dessa mål innebar att visa studenterna en vacker och logiskt precis, axiomatisk, euklidisk geometri och att förse dem med färdigförpackad, systematiskt ordnad kunskap. De flesta studenter lyckades inte förstå strukturen, och därför blev deras kunskap i stor utsträckning formell. Det var mycket annorlunda än vad som några år senare skulle förväntas av deras undervisning. Dessa traditionella mål ersattes av nya, som vi hoppades skulle öppna vägen för studenterna att lära sig en rad färdigheter som både de och deras presumtiva elever skulle behöva för att göra likväl som för att lära sig matematik. Vi lade huvudvikten på utveckling av kognitiva förmågor, som att experimentera, att upptäcka, att argumentera, att skapa bilder av geometriska begrepp och att utveckla dem genom gruppdiskussioner. Avsikten var också att betona utvecklingen av studenternas egen förmåga att föra resonemang och att tolka dessa bilder och se deras plats i den geometriska världens struktur. Dessutom ville vi att studenterna skulle utveckla förmågan att undersöka sina egna tankeprocesser, att upptäcka misstag i sitt tänkande och att kunna agera effektivt när de upptäckte misstagen. Vi fick även ta med i beräkningen att spännvidden i studenternas förkunskaper var mycket stor.

Innehållet i den nya kursen avspeglar studenternas behov i deras framtida roll som lärare, och en lärobok producerades speciellt för dem (Hejný & Jirotková). Läroboken skrevs på ett sådant sätt att principerna i det konstruktivistiska förhållningssättet kunde tillämpas i alla situationer (Hejný & Kurina, 1998; Noddings, 1990). Med detta menar vi att läraren inte endast överför kunskap till eleverna utan även presenterar problem, ställer frågor och leder diskussioner i klassen. Läraren är inte längre domaren som avgör vad som är fel och vad som är rätt. Eleverna memorerar inte formler, definitioner, algoritmer, teorem och bevis för dessa. Utgående från sitt individuella arbete, sina egna experiment samt presentation och diskussion av sina resultat söker de efter nya samband, formulerar hypoteser och konstruerar gradvis ny kunskap. Nya problem initieras ofta av eleverna själva. Vissa problem kan förbli olösta eller delvis olösta under ett antal lektioner innan eleverna, tillsammans med läraren, kommer fram till någon slutsats. Misstag anses inte vara negativa, utan ses i stället som tillfällen att lära. Eleverna vägleds till att se misstag, att söka efter orsaker och att föreslå strategier för att avhjälpa och undvika dem i framtiden.

En del av de idéer som används i denna artikel kommer från läroboken ifråga (Hejný & Jirotková, 1999).

Forskningsmetodik

Under flera år genomförde vi aktionsforskning under geometrikursen för blivande lärare för motsvarande svensk grundskolas tidigare år. Parallella grupper undervisades av Hejný och Jirotková för att vi skulle kunna diskutera och jämföra utfallet efter varje lektion. Scenariot för varje lektion var noggrant planerat i förväg. Studenterna fick börja varje pass med ett fem minuter långt test, och resultatet av detta analyserades för att studenterna skulle få respons på sina kunskaper och färdigheter. Studenterna utmanades att reflektera kring sina lösningsprocesser på speciella uppgifter som de åtog sig att göra utanför klassrummet. I slutet av terminen fick studenterna lösa helt nya uppgifter som kunde lösas genom att de använde samma arbetsmetoder som introducerats under terminen. Självreflektion kring lösningsprocessen var också ett krav. Studenternas skriftliga arbete analyserades för att man skulle se vilka kunskaper de förvärvat utan verklig förståelse. Detta innebar att innehåll och ansatser gradvis förändrades. Dessutom introducerades ett nytt sätt att utvärdera, vilket innebar att studenterna fick poäng för alla relevanta aktiviteter, och poängen ackumulerades under kursen och avgjorde vilket slutbetyg de fick. Forskningsarbetet pågår fortfarande, med särskild tonvikt på hur effektiv den konstruktivistiska ansatsen är när det gäller utveckling av ny kunskap hos studenterna (Jirotková & Stehlíková, 2003). Den forskningsmetod som tillämpas i denna del av arbetet består av halvstrukturerade studentintervjuer som spelas in, skrivs ut och analyseras. Resultatet diskuteras sedan med de intervjuade.

Grunden för vårt arbete utgjordes dels av Hejnýs mångåriga, 1976 till 1988, experimentella undervisning av elever i olika åldrar, dels av Hejnýs och Jirotkovás kurser med blivande lärare i elementär och analytisk geometri från 1990 till 2001.

Resultat

I det här avsnittet visar vi hur man kan leda studenterna till djupare insikter genom ett flertal delupptäckter, som vi antydde i inledningen. Olika problemsituationer presenterades för elever i åldrarna 6–7 år och äldre och till lärarstuderande. Vi har valt några av dessa tillsammans med de framväxande lösningarna för att ge exempel på hur man kan handleda eleverna till upptäckten av pythagoreiska tripplar (Hall & Rowland, 1997). Detta exempel är ett collage av flera lösningsprocesser, sammanställda över tid med olika grupper av elever eller lärarstuderande i olika geometrikurser. De faktiska lösningarna av problemsituationerna beskrivs i detta avsnitt som *episoder*.

Handledarna presenterar helt enkelt problemsituationen, utan att ge eleverna någon detaljerad instruktion. De ställer bara frågor och ger tips som kan hjälpa eleverna att hitta lösningar samt leder diskussioner med och mellan eleverna. Eleverna förväntas lösa uppgifterna genom att använda sina egna erfarenheter – de nya erfarenheter de får genom sitt experimenterande och genom omfattande diskussioner med varandra. De konstruerar ny kunskap genom generalisering. Det händer ofta under denna process att elever själva kommer på nya problem.

Den terminologi som genomgående används i dessa uppgifter är *rutnätspapper*, alltså rutat papper, *nätpunkter*, som är skärningspunkterna mellan horisontella och vertikala linjer, *nätsträcka*, en sträcka vars ändpunkter är nätpunkter, *nätlinjer*, en rät linje som går genom minst två nätpunkter. *Nättriangel* och *nätpolygon* definieras på motsvarande sätt.

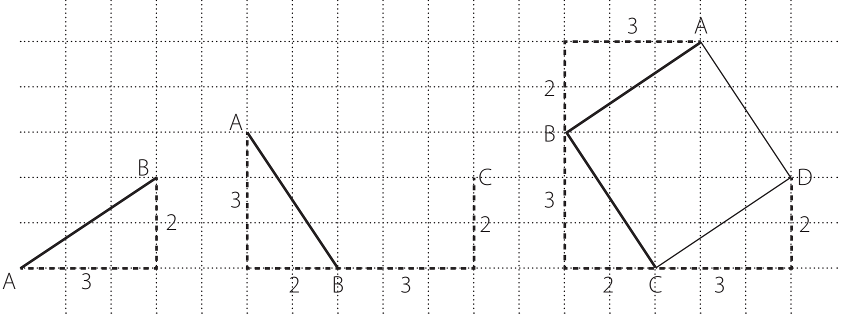
Den inledande problemsituationen för eleverna var helt enkelt att mäta nätsträckor på rutnätspapper så exakt som möjligt. Lösandet av detta problem gav upphov till ett nytt: Var det möjligt att hitta diagonala nätsträckor vars längder kan uttryckas som ett heltal? Lösningen på detta problem förde oss till den algebraiska konstruktionen av alla pythagoreiska tripplar. Vi introducerade problemet genom att använda följande situation:

Problemsituation 1 – Att rita kvadrater i rutnätet

Utgå från en given nätsträcka och rita minst en kvadrat för vilken den givna linjen utgör en sida.

Episod 1 – Upptäckten av hur man konstruerar en nätkvadrat

Efter att ha experimenterat och ritat olika kvadrater, upptäckte studenterna flera sätt att rita kvadraten. Två av dessa följer nedan.



Figur 1

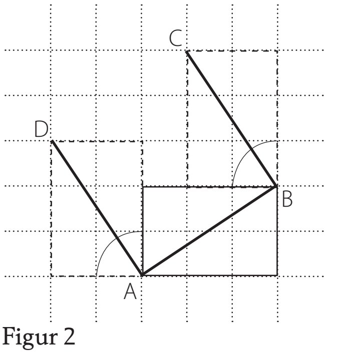
1

Utgå från den givna nätsträckan AB (se figur 1). Från A gå tre steg åt höger och sedan två steg upp för att komma till punkt B. Vrid sedan papperet -90°. Utgå från punkt B, ta tre steg till höger och sedan två steg uppåt för att komma till punkt C. Vrid papperet -90°. Upprepa samma procedur för att komma till punkt D. Upprepa proceduren för att komma tillbaka till A.

→

2

Rita rektangeln vars sidor ligger på rutpapperets linjer och vars diagonal är AB (se figur 2). Vrid denna rektangel medurs 90° runt punkt B. Rita den roterade rektangelns diagonal med början vid B. Den andra ändpunkten är C. Vrid nu den ursprungliga rektangeln 90° moturs runt punkt A och rita den roterade rektangelns diagonal med början i A och med D som andra ändpunkt. Förbind CD, och du får kvadraten ABCD.



Figur 2

Kommentar

Den kunskap som studenterna får genom att rita kvadraten gör att de kan rita en nätlinje genom en nätpunkt vinkelrätt mot en annan nätlinje.

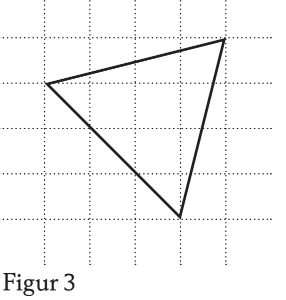
Problemsituation 2 – Att söka liksidiga trianglar

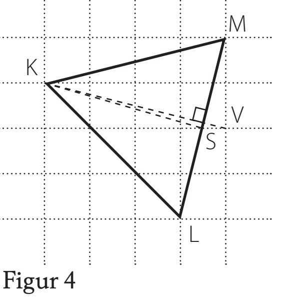
Hitta åtminstone en liksidig triangel.

Episod 2 – Liksidig triangel

Den bästa approximationen av en liksidig triangel som studenterna kunde finna framgår av figur 3. En diskussion om huruvida sidorna var lika ägde rum. Två motsatta synsätt dominerade diskussionen. En grupp studenter var övertygade om att den var liksidig efter att ha mätt den. Den andra uppfattningen ledde till konstruktionen av figur 4 med argumentet:

> *Om triangeln KLM är liksidig måste linjen KS vara dess höjd. Men det är den inte eftersom den vertikala linjen från K är KV och inte KS.*


Figur 3



Figur 4

Kommentar

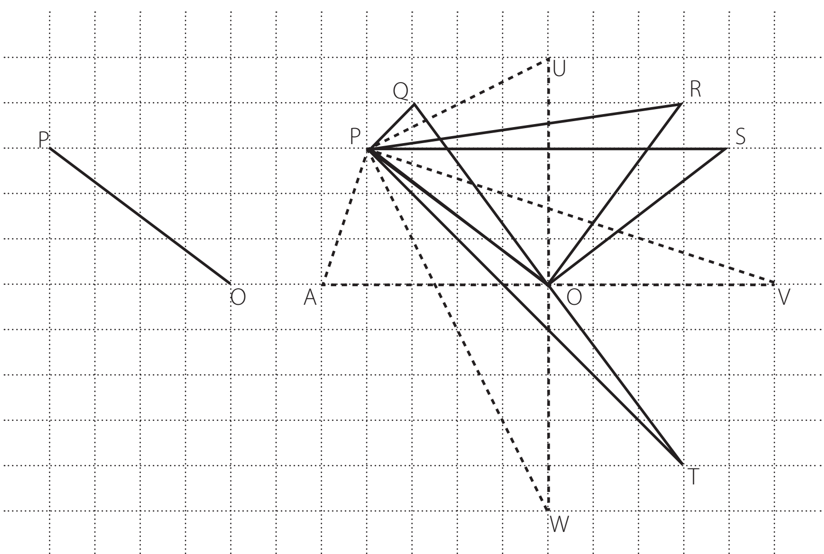
Problemsituation 2 förblev olöst på detta stadium. Vi fortsätter inte med den i denna artikel. Den löstes av studenterna när de kopplade problemet till nättrianglars area. Hur då?

Episod 3 – Likbenta trianglar

För att problemet skulle bli lättare ombads studenterna att söka efter likbenta trianglar när en av de lika långa sidorna var given. De tyckte att exemplet de fått i figur 5 var intressant och det gav upphov till en omfattande diskussion om huruvida triangeln POW var likbent eller inte. En hypotes uttrycktes mycket starkt:

Ingen diagonal nätsträcka kan ha måttet ett exakt heltal.

De använde idéerna som beskrevs i episod 2 för att bevisa att triangeln POW är likbent: Linjen som sammanbinder mittpunkten på PW och O är vinkelrät mot PW och därför är triangeln OPW likbent. Därför är sträckan OP exakt 5 enheter, trots att den är diagonal, vilket motbevisar hypotesen. En ny upptäckt gjordes dock, och ett nytt problem formulerades av studenterna själva.



Figur 5

Problemsituation 3 –
Att söka diagonala nätsträckor som har heltalsmått

Hitta så många diagonala nätsträckor som möjligt vars längd kan uttryckas som ett heltal relaterat till den enhet som rutnätet ger.

Episod 4 – Likbenta nättrianglar med en sida utefter en nätlinje

Studenterna som tagit intryck av sin senaste upptäckt fokuserade sin uppmärksamhet på den nya uppgiften och hittade flera av dessa trianglar. Nu fick handledaren ingripa för att styra studenternas sätt att experimentera. De fick följande vägledning: Om man ordnar sina experiment och väljer lämpliga belägg från dem visar sig lätt nya relationer.

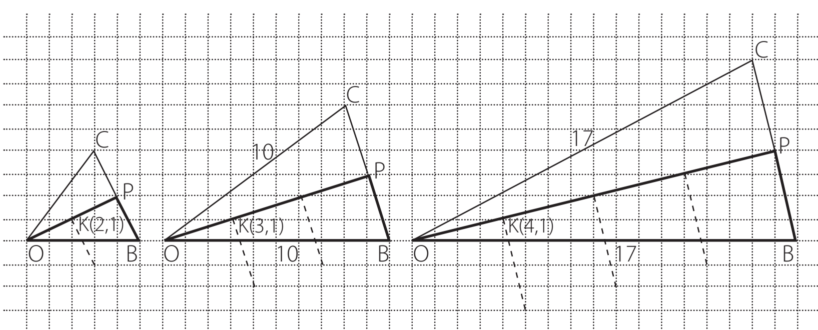
Episod 5 – Upptäckten av triangelhöjdens nyckelroll

Studenterna upptäckte en nyttig ledtråd som gjorde att de kunde rita den efterfrågade triangeln:

> *Börja rita triangeln genom att först rita den stråle som ska innehålla höjden i den efterfrågade triangeln.*

De formulerade följande hypotes:

> *Välj en godtycklig nätsträcka OK. Den kan alltid förlängas för att få nätsträckan OP och hitta punkten B, så att triangeln OPB är en rätvinklig triangel med hypotenusan OB på en nätlinje* (se figur 6).



Figur 6

Episod 6 –
Användning av koordinater och upptäckt av det första sambandet

Efter att ha ordnat alla de funna trianglarna O*BC* upptäckte studenterna det första sambandet. Detta formulerades efter att de löst en uppgift som inte kunde lösas genom att de ritade på rutpapperet. De ombads att rita triangeln O*BC* så att *K*:s koordinater var (7,1) där O var origo. Studenterna upptäckte att koordinaterna gjorde att de kunde beskriva vad som hände utanför rutnätets begränsningar. De formulerade då följande:

> *Vi får den efterfrågade triangelns höjd genom att förlänga nätsträckan* OK *sju gånger. Generellt, om punkten K:s koordinater är (a, 1) är det nödvändigt att förlänga nätsträckan* OK *a gånger.*

Kommentar

Resultatet av den här generaliseringen är ett enparametriskt system av trianglar och sträckor med heltalslängder. Systemet förstås proceduriellt och talen som används är mätetal (Hejný, 2003; Hejný & Littler, 2002).

Episod 7 – Användning av algebra

När man beskriver trianglarna med hörnens koordinater och andra relevanta punkter K och P, får de tal man använder en ny roll, en adress (Hejný, 2003; Hejný & Littler, 2002). Studenterna uppmanades att beskriva föregående situation, se figur 6, i tabellform med hjälp av talen som är punkternas koordinater i diagrammet.

Innebörden av punkterna *K*, *P*, *B*, *C* anges i figur 6. Uppgifterna för de tre första raderna togs direkt från figur 6. Det var inte nödvändigt att rita fler bilder för att komplettera de andra raderna eftersom talmönstren i kolumnerna var lätta att se. När studenterna kunde komplettera en rad med tal var de nära generaliseringen på den sista raden i tabell 1.

Tabell 1

K		*P*		*B*		*C*	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
2	1	4	2	5	0	3	4
3	1	9	3	10	0	8	6
4	1	16	4	17	0	15	8
...	...	...	...	...	...	...	...
7	1	49	7	50	0	48	14
...	...	...	...	...	...	...	...
a	1	a^2	a	a^2+1	0	a^2-1	$2a$

Kommentar

Mängden likbenta trianglar och diagonala nätsträckor med heltalslängd uppfattas nu som ett begrepp. Resultatet av detta är följande uttalande:

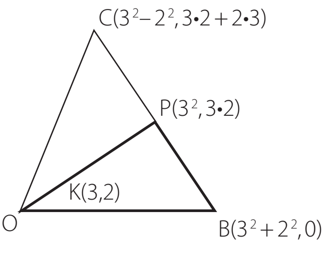
> *För varje naturligt tal a, existerar det diagonala nätsträckor* OC *med heltalslängd.* C*:s koordinater är* $(a^2-1, 2a)$ *och* OC*:s längd är* (a^2+1).

Episod 8 – Utmaning att lösa fallet K(a, 2)

Eleverna ritade trianglar OBC då K var (3, 2), (4, 2), (5, 2) ..., och de bestämde koordinaterna för punkterna O, P, B, C för varje fall (se figur 7). Uppställningen av data i tabellform gjorde det möjligt att formulera de nya relationer som uttrycks på den sista raden i tabell 2. Resultatet formulerades som:

> *För varje naturligt tal a finns en diagonal nätsträcka* OC *med heltalslängd.*
> C*:s koordinater är* $(a^2-4, 4a)$ *och* OC*:s längd är* (a^2+4).

Figur 7



Tabell 2

K		*P*		*B*		*C*	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
3	2	9	6	13	0	5	12
...	...	...	...	...	...	...	...
5	2	25	10	29	0	21	20
...	...	...	...	...	...	...	...
7	2	49	14	53	0	45	28
...	...	...	...	...	...	...	...
a	2	a^2	$2a$	a^2+4	0	a^2-4	$2 \cdot 2a$

Kommentar

Nu kan man se att den andra koordinaten också påverkar resultatet. Detta beskrivs i följande episod.

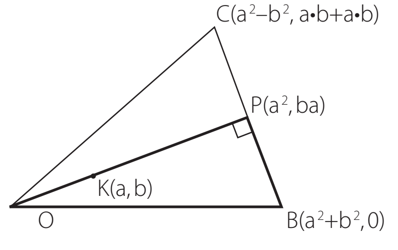
Episod 9 – Generalisering

Studenterna löste fallet $K(a, 3)$, och denna erfarenhet gjorde att de snabbt kunde gå vidare till resultatet av det här fallet. Handledaren bad eleverna att i en ny tabell sammanställa de sista raderna i föregående tabeller. Eleverna lade märke till att uttrycken i kolumnerna uppförde sig som förväntat. De hade inga problem med att fylla i någon rad i tabellen och komma fram till det generella uttrycket i sista raden på den nya tabell som de tidigare tabellernas sista rader överförts till (se tabell 3).

Nu kunde de också finna den likbenta triangeln OBC för varje punkt $K(a, b)$, där a och b är naturliga tal. De upptäckta relationerna tolkades både muntligt och i diagramform (se figur 8).

> *För varje par av naturliga tal a, b, a > b, är det möjligt att hitta en diagonal nätsträcka* OC *som har heltalslängd.*
> *C:s koordinater är* $(a^2 - b^2, 2ab)$ *och OC:s längd är* $a^2 + b^2$.

Figur 8



Tabell 3

K		P		B		C	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
a	1	a^2	a	a^2+1	0	a^2-1	$2a$
a	2	a^2	$2a$	a^2+4	0	a^2-4	$2 \cdot 2a$
a	3	a^2	$3a$	a^2+9	0	a^2-9	$2 \cdot 3a$
...	...	...	...	...	...	...	...
a	7	a^2	$7a$	a^2+7^2	0	a^2-7^2	$2 \cdot 7a$
...	...	...	...	...	...	...	...
a	b	a^2	ba	a^2+b^2	0	a^2-b^2	$2ba$

Kommentar

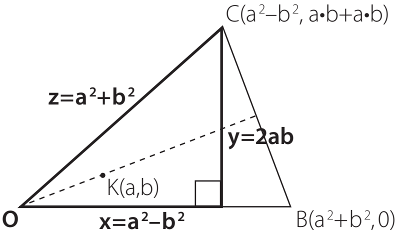
Tabellerna ovan visar på kunskapens abstraktionsprocess. De första tre raderna är belägg från konkreta situationer, isolerade modeller (Hejný, 2003). Den rad där k_2 är 7 uttrycker studentens förmåga att se ett mönster i den givna tabellen (generisk modell). Den sista raden visar att studenten har tillägnat sig den abstrakta kunskapen.

Episod 10 – Att använda Pythagoras sats

Den sista utmaningen är att upptäcka alla pythagoreiska tripplar, det vill säga, i algebraiska termer finna alla lösningarna på den diofantiska ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$ i mängden naturliga tal. Genom att se tillbaka på figur 8 och ta Pythagoras sats med i beräkningen kunde studenterna formulera en ny tolkning av sitt senaste resultat.

> *Det är möjligt att beskriva några av lösningarna av den givna ekvationen på följande sätt:* $z = a^2 + b^2$, $x = a^2 - b^2$ *och* $y = 2ab$ (se figur 9).

Figur 9



Kommentar

En lösning som $z = 15$, $x = 9$ och $y = 12$, vilket är en helt korrekt pythagoreisk trippel, kan inte bestämmas på detta sätt. Vi kan emellertid få denna trippel genom att multiplicera trippeln (3, 4, 5), med i detta fall 3. De tripplar där de tre talen inte har en gemensam faktor kallas primitiva pythagoreiska tripplar. Vi kan hävda att alla primitiva pythagoreiska tripplar kan hittas genom den upptäckta metoden. Vi lämnar beviset för detta åt läsaren.

Diskussion

Som vi framhållit ovan presenteras de 10 episoderna som faktiska elevlösningar, medan de i själva verket samlats in från flera kurser vid olika tillfällen. Hela proceduren genomfördes med blivande lärare för äldre elever under ett fåtal lektioner i deras kurs i analytisk geometri. Det är nästan omöjligt att säga hur lång tid det tar för studenterna att nå denna nivå av abstrakt kunskap. Till exempel är en av de viktigaste principerna i ett konstruktivistiskt förhållningssätt oförutsägbarhet. Det kan hända att studenter lägger fram ett problem som leder i en helt annan riktning än den som läraren tänkt sig. Läraren får inte försitta tillfället att låta studenterna lösa sina egna problem, men måste återgå till sin ursprungliga planering vid lämpligt tillfälle.

Processen genomfördes på liknande sätt med blivande lärare för yngre elever. Här fick emellertid många fler uppgifter ges på varje stadium, för att utveckla studenternas självförtroende i den nya geometriska miljön (rutnätspapper) och för att ge dem tillräcklig erfarenhet att generalisera utifrån. Av dessa studenter lyckades en del inte uppnå det sista stadiet av abstrakt kunskap utan hjälp.

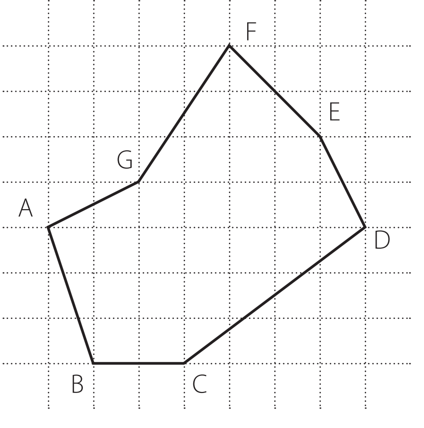
Vi arbetade också mycket med den här metoden och lärandemiljön, med elever i upp till ca 12 års ålder. Ämnet som diskuteras i denna artikel, pythagoreiska tripplar, är inte lämpligt på denna nivå. Om de preliminära idéerna i episoderna 1 till 6 utvidgas med många fler uppgifter fungerar de bra även bland dessa elever.

Här följer fler exempel på uppgifter lämpliga för dessa elever, utvecklade av Hejný och Jirotková. Uppgifterna 1–4 fokuserar på språk och symboler. Innan koordinater har introducerats för unga elever (8 år gamla) kan de beskriva vägen mellan två nätpunkter med hjälp av pilar.

Uppgift 1

John ville beskriva ritningen i figur 10 för sin vän i Kina. Han kom på ett sätt att göra detta utan att använda ord. Han började så här:
$A \downarrow\downarrow\downarrow\rightarrow B \rightarrow\rightarrow C \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow\; D\ldots$
Avsluta beskrivningen av Johns ritning.

Figur 10



Uppgift 2

Rita den bild som beskrivs med följande piltecken:
$K \rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\downarrow\downarrow\leftarrow L\; \downarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\leftarrow M \downarrow\leftarrow\uparrow\leftarrow\uparrow\leftarrow\downarrow\downarrow N.$
Markera punkterna K, L, M, N.
b) Kan du skriva piltecknen på ett enklare sätt?

Uppgift 3

På hur många sätt kan du med hjälp av pilar beskriva vägen från punkt G till punkt E i figur 10?

Uppgift 4

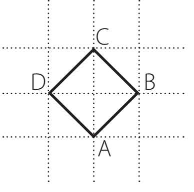
I figur 11 finns en nätkvadrat ABCD. Den kan beskrivas med hjälp av sex pilar: $A \rightarrow \uparrow B \uparrow \leftarrow C \leftarrow \downarrow D$.

a Är det möjligt att beskriva en nätkvadrat med hjälp av 8 pilar? Om det är så, skriv ner pilnotationen.

b Beskriv en godtycklig nätkvadrat med hjälp av 12 pilar. Hitta minst 5 olika kvadrater.

c Hitta ett enkelt sätt att skapa pilnotationen för en godtycklig nätkvadrat så att den kan tillämpas på mycket stora kvadrater, t ex en kvadrat med en sida längre än 100 enheter.

Figur 11



Kommentar

Figuren är ett begrepp. Dess beskrivning är en process. Uppgift 1 fokuserar på överföringen av begreppet till processen,”processualisering” av ett begrepp.

Uppgift 2 fokuserar på att överföra processen till begreppet, ”konceptualisering” av en process, och syftar till ett mer passande proceduriellt uttryck av begreppet. Uppgift 3 och 4 visar hur det är möjligt att anknyta arbete med nätpapper till kombinatorik. Uppgift 3 är tvetydigt formulerad. Elever som löser detta problem letar oftast bara efter den kortaste vägen från G till *E*, men det finns fem sådana. Så snart som någon elev upptäcker även den längre vägen, t ex genom punkten *F*, är det uppenbart att det finns ett obegränsat antal lösningar på uppgiften och att det inte är möjligt att beskriva dem alla.

Uppgiftssekvensen leder fram till koordinater. Den väsentliga skillnaden mellan pilnotationen och dessa är att varje punkt i pilnotationen relaterar till den föregående medan varje punkt i koordinatsystemet relaterades till en fast punkt – origo.

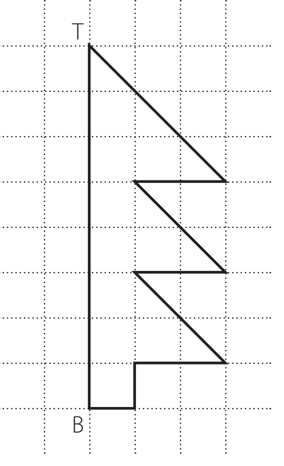
Uppgift 5

Följande pilnotation beskriver den likbenta triangeln *KLM*:

K→↓→→↑↑←←↓← *K*. Någon har tagit bort bokstäverna *L* och *M* från notationen. Komplettera pilnotationen ovan genom att sätta in bokstäverna *L* och *M* på lämpliga ställen. Hur många lösningar kan du hitta?

Uppgift 6

Skriv ner den pilnotation som beskriver ritningen i figur 12 och komplettera pilnotationen så att resultatet blir en symmetrisk form med *BT* som symmetrilinje.



Figur 12

Kommentar

Vi anser att den elev som klarar att använda pilnotationen för att beskriva den saknade delen av figuren utan att rita den har en god förmåga att använda sitt strukturella tänkande.

Slutsats

I denna artikel har vi introducerat en heuristisk metod som vi kallar metoden med stegvis införande av koordinater (Hejný, 1989). Den bygger på experiment, systematisering, överföring av upptäckter till mönster, att göra och utnyttja relationer mellan visuell geometri och proceduriell aritmetik, att generalisera delresultat samt att ställa samman dessa resultat för att nå generalisering. Metodens slutliga steg är att tolka de generella slutsatserna.

Metoden har ett brett användningsområde. Den går att använda med elever i åk 1–6 och är möjlig att individualisera. Vissa elever kan behöva fler exempel för att upptäcka mönster i tabellerna, och högpresterande elever kan formulera resultaten på symbolspråk. Arbetssättet är tidskrävande och ställer krav på tålamod hos handledaren så att eleverna inte stressas fram till att acceptera kunskap som de inte har upptäckt själva. Vi är medvetna om att våra idéer kan vara svåra att genomföra när man arbetar i grupper på 30 elever eller fler. Handledaren måste balansera verkligheten mot sina målsättningar. Den metod vi föreslagit här är värd att pröva genom alla fördelar man får, elevernas glädje över att själva erövra kunskap, med djupare förståelse av geometriska begrepp och inte minst deras vilja att utveckla sin kunskap i ämnet. I denna artikel visar vi att rutnätspapper är en lämplig geometrisk miljö för förverkligandet av det konstruktivistiska förhållningssättet till undervisning.

Referenser

Hall, B. & Rowland, T. (1997). The classical form of Pythagorean triples. *The Mathematical Gazette 81*(491), 270–272.

Hejný, M. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava.

Hejný, M. (2003). Understanding and structure. I A. Mariotii (Red), *Proceedings CERME 2003*, Bellaria, Italy.

Hejný, M. & Jirotková, D. (1999). *Ctverekovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou*, Praha: UK, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. & Jirotková, D. & Stehlíková, N. (1996). *Analytická geometrie*. Praha: Karolinum.

Hejný, M. & Kurina, F. (1998). Konstruktivní prístupy k vyucování matematice. *Matematika – fyzika – informatika*, V.7, Praha.

Hejný, M. & Littler, G. (2002). The beginning of algebraic thinking. I C. Bergsten (Red), *Dokumentation av 12:e Matematikbiennalen*. Linköpings Universitet.

Jirotková, D. & Stehlíková, N. (2003). Constructivist approaches in the mathematical education of future teachers. Poster. I N. A. Paterman, B. J. Dogherty & J. Zilliox (Red), *Proceedings PME 27, PME-NA 25* (s 1–295). College of Education, University of Hawaii.

Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. I R. B. Davis, C. A. Maher & N. Noddings (Red), *Constructivist views of the teaching and learning of mathematics*, (s 7–18). (Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series, Number 4.) Reston, VA: NCTM.

Flickproblem och pojkproblem

MARJA VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN

Nederländska elever lyckas väl i internationella, jämförande studier av prestationer i matematik, men till skillnad från i många andra länder har flickor i ”primary school”[1] genomgående sämre matematikresultat än pojkar. Denna skillnad i nationella utvärderingar gav upphov till MOOJ-studien. Där analyserades resultat från test i årskurs 6. Tre års data från 5000 skolor fanns tillgängliga. Genom att studera ”extrema” problem – problem där pojkarna hade bättre genomsnittligt resultat än flickorna eller problem där resultaten var ungefär lika – identifierades könsspecifika egenskaper hos matematikproblem.

Resultaten är förvånande. Tvärtemot vad man ofta antar, visade studien att det inte är kontextens natur – ”flickvänlig” eller ”pojkvänlig” – som är den mest bidragande faktorn till skillnaden i resultat. I stället visade sig problemens matematiska natur vara viktigare. Dessa resultat bekräftades av en analys av data från en nationell utvärdering av matematikprestationer. Dessutom verifieras existensen av pojkproblem och flickproblem av studier som visar på könsspecifika skillnader i strategier.

När man idag diskuterar skillnader i skolprestationer mellan könen, uttrycker man ofta oro för att pojkarna släpar efter flickorna. Från Australien, Nya Zeeland, USA och England kommer larmrapporter om att flickorna överträffar pojkarna t ex (Shaw, 2002). Även i Nederländerna verkar det ha skett ett trendbrott i slutexamen i secondary school, åtminstone när det gäller de studieförberedande programmen. På övriga program har flickor

[1] I artikeln används genomgående den engelskspråkiga förlagans beteckningar primary resp secondary school. I Nederländerna är skolan obligatorisk från 5 till 16 års ålder. De flesta börjar dock skolan när de fyller fyra. Primary school innfattar kindergarten 1 och 2 (4–5 år) samt åk 1–6 (6–12 år). Secondary school innefattar yrkesutbildning, allmän utbildning och utbildning som förbereder för universitetsstudier. De omfattar fyra, fem respektive sex års studier.

fortfarande sämre matematikresultat än pojkar (Alberts & Noordermeer, 2002). Mest förvånande är emellertid resultaten från primary.

Sedan 1987 har CITO, det nationella institutet för utbildningsmätningar, på nationell nivå undersökt hur nederländska elever i primary school presterar i matematik. Denna studie, PPON, den nationella utvärderingen av utbildningsresultat, genomförs vart femte år. PPON synliggör utvecklingen inom utbildningsområdet men de har också påvisat könsskillnader i matematikresultat. Det visar sig att pojkarna genomgående presterar bättre än flickorna, se PPON-resultat som rapporterats av (Wijnstra, 1988; Bokhove, Van der Schoot, & Eggen, 1996; Janssen, Van der Schoot, Hemker, & Verhelst, 1999). Det är oklart hur länge dessa skillnader har funnits. Så tidigt som på 1980-talet påpekade Wijnstra att nederländska flickor i primary school låg efter i matematik.

Om man bara tar med de senaste 10 åren i beräkningen låter det sig åtminstone sägas att dessa resultat från primary school skiljer sig från de man finner i många andra länder. Även om rönen i internationell forskning inte alltid är otvetydiga finner man i allmänhet inga skillnader i resultat, och om det finns några är de vanligen till flickornas fördel (Geary, 1996; Hyde, Fennema & Lamon, 1990; Leder, 1992). Detta är dock inte fallet i Nederländerna. Den icke-typiska trenden i våra resultat visades åter i TIMSS 1995 (Mullis, Martin, Beaton, Gonzalez, Kelly & Smith, 1997). Signifikanta könsskillnader i åldrarna 9 – 10 år fann man t ex bara i Nederländerna, Japan och Korea.

I den här artikeln rapporterar jag om undersökningar som har genomförts i Nederländerna för att utröna varför flickor i primary school släpar efter pojkar i matematikprestationer. Denna fråga är förbryllande just för att vårt land anses vara ett av de matematikdidaktiskt ledande. Våra läroböcker och vårt förhållningssätt till matematikundervisning baseras på den utbildningsteori som kallas Realistic Mathematics Education (RME) och har tagits som modell och inspirationskälla för matematikutbildning i andra länder.

Grunden för RME lades av Hans Freudenthal och hans kolleger i början av 1970-talet. En kort översikt över filosofin och principerna bakom RME återfinns i Van den Heuvel-Panhuizen (2001). RME:s betydelse ligger i dess fokus på matematik som är värd att lära sig och som är begriplig för eleverna. RME söker uppnå dessa mål genom att göra matematiken till en del av elevernas erfarenhet och få dem aktivt involverade i lärandeprocessen. I korthet innebär RME:s ansats att man i matematikundervisningen börjar med rika kontextuella problem som kan lösas på olika sätt. Med hjälp av klassrumsdiskussioner och användning av modeller utvecklas de inledningsvis kontextanknutna strategierna till mer generella, formella lösningar som speglar en högre grad av förståelse.

Trots att Nederländerna placerar sig högt i internationella, jämförande studier verkar det som matematikutbildningen för hälften av våra elever inte ger så stort utbyte som den skulle kunna. Detta är ännu mer anmärkningsvärt om man betänker att RME anses ha en ”flickvänlig” undervisningsmetod och kursplan.

Det är inte lätt att besvara frågan varför holländska flickor redan i primary school lyckas mindre bra i matematik än pojkar. Forskningen har hittills lärt oss att det inte finns någon enkel förklaring till de prestationsmässiga skillnaderna mellan könen (Arnot, James, Gray & Ruddock, 1999). Detta stämmer förvisso även på den nederländska situationen. Många faktorer, såsom kursplan, undervisningsmetoder, utvärderingsverktyg, eleverna själva och till och med samhället i stort, kan bidra till de sämre matematikresultaten för flickor i nederländsk primary school. Även om det är möjligt att undersöka alla dessa potentiella faktorer och relatera dem till varandra kommer inget sådant försök att göras i den här artikeln. I stället kommer fokus att ligga på var skillnaderna visar sig. Finns det matematiska problem som besvaras och löses olika av flickor respektive pojkar? Svaret på denna fråga kommer inte att lösa problemet med könsskillnader i uppnådda kunskaper, men det kan ge oss en viktig ledtråd när vi ska förbättra vår matematikutbildning.

Frågan om könsspecifika problem dök upp i MOOJ-studien, se nedan. Denna studie kommer därför att vara central i denna artikel och kommer att diskuteras först. Resten av artikeln kommer att ägnas åt att söka ytterligare belägg för existensen av ”flickproblem” och ”pojkproblem” (definitioner kommer att ges senare) och tillhörande könsskillnader i strategier. Den fortsatta forskningen kring dessa rön har bekräftat resultaten i MOOJ. De stöds också av den nyligen publicerade könsfokuserade analysen av data från TIMSS och av internationell forskning kring olikheter i hur elever i primary school använder strategier.

MOOJ

Även om det länge funnits indikationer på att flickor i primary school lyckas mindre bra i matematik än pojkar, var det inte förrän i mitten på 1990-talet som man började forska kring dessa könsskillnader i Nederländerna. 1995 fick Freudenthal-institutet vid universitet i Utrecht och Center for Study of Education and Instruction vid universitetet i Leiden ett anslag från det holländska utbildningsministeriet för att påbörja denna forskning. Studien fick namnet MOOJ och pågick till 1999. För en detaljerad rapport, se Van den Heuvel-Panhuizen & Vermeer (1999).

Syftet med MOOJ var tvåfalt: Dels att få en översikt över omfattningen och arten av könsskillnader i matematikprestationer i primary school och dels att hitta orsaker i klassrummet som bidrar till dessa skillnader.

Studiens uppläggning skilde sig från det vanliga sättet att lägga upp utbildningsforskning. Studien bestod av tre faser. I första fasen studerades omkring 5 000 skolor. I andra fasen (IIa) valdes 14 skolor ut som studerades mer ingående och slutligen i fas IIb detaljstuderades fyra skolor. Denna uppläggning av MOOJ kan karakteriseras som ”att söka efter de platser där viktig kunskap om könsskillnader kan finnas”. Studiens ansats är i linje med idén om ”teoretisk sampling”, se Glaser och Strauss (1967).

Fokus i denna artikel ligger på de två första faserna i studien. En rapport om den sista fasen finns i Van den Heuvel-Panhuizen (2003).

I fas I av MOOJ analyserades resultat från 1993 – 95 på CITO-testet som ges i slutet av primary school, alltså i årskurs 6 (12 år). Testet ger individuella elevresultat som ligger till grund för intagning till secondary school. Det är inte obligatoriskt, men vid tidpunkten för analysen genomfördes det i ungefär 70% av skolorna och i dagsläget deltar cirka 80%. Detta innebär att från 1993 till 1995 användes testet av omkring 5 000 skolor årligen och berörde varje år omkring 100 000 årskurs 6-elever. Vid sidan av uppgifter i modersmål och informationsbehandling innehåller testet 60 matematikuppgifter uppdelade i tre delar. Uppgifterna ges med alternativsvar.

Testresultaten i fas I analyserades på tre olika nivåer: individuell elevnivå, uppgiftsnivå och samlad skolnivå. De två första analyserna skulle ge insikt i hur matematikprestationer skiljer sig mellan flickor och pojkar. Den tredje analysen hade som mål att välja ut skolor för fas IIa och IIb.

För att bättre förstå orsakerna till de observerade könsskillnaderna genomfördes i fas IIa ytterligare forskning vid ett antal skolor som i analysen av fas I framstod som ”extrema”. Sammanlagt deltog 14 skolor i detta skede: 7 där pojkar konsekvent presterade bättre än flickor (kallade ”pojkskolor”) och 7 där flickornas resultat var lika bra som eller något bättre än pojkarnas (kallade ”flickskolor”). I dessa skolor har ytterligare skriftliga data samlats in från både lärare och elever. Detta inkluderar ett matematiktest för elever i årskurs 6, där information om strategier samlades in.

Resultat från MOOJ, fas I

Bekräftelse av könsskillnader i matematikresultat

Analysen av de individuella elevnivåerna i resultaten på CITO-testet inkluderade, för varje år och för båda könen separat, den genomsnittliga procentandelen korrekta svar (p-värde) och standardavvikelse. Resultaten från analysen på elevnivå visade att varje år hade pojkar i årskurs 6 bättre matematikresultat än flickor. År 1995, till exempel, besvarade pojkarna 72% av problemen korrekt, jämfört med flickornas 65%. Över de tre åren som studien omfattade fanns en skillnad på 6 procentenheter, vilket är något mer än en fjärdedel av resultatens standardavvikelse. Resultaten bekräftade rönen i de två första PPON-studierna (Bokhove, Van der Schoot & Eggen, 1996; Wijnstra, 1988).

Upptäckt av könsspecifika problemegenskaper

Analysen på uppgiftsnivå inkluderade beräkning av p-värdet för var och en av de 180 uppgifterna för flickor och pojkar separat, följt av beräkning av skillnaden mellan pojkars och flickors p-värden. Därefter valde vi, från alla tre åren, ut de uppgifter där skillnaden var störst. Urvalet genomfördes separat för de problem där pojkarna överträffade flickorna och de problem där flickorna hade relativt goda resultat. För att det skulle bli samma antal uppgifter för båda könen valdes även uppgifter för flickorna där skillnaden var i det närmaste noll. Till slut resulterade detta urval i en uppsättning på 34 problem som utfördes bättre av pojkar, kallade ”pojkproblem”, och 36 problem som klarades relativt bra av flickorna, kallade ”flickproblem”. Skillnaderna i p-värden mellan pojkars och flickors resultat varierade från +0,26 till -0,04, där procentandelarna räknats om till decimaler.

Därefter genomfördes en kvalitativ analys av dessa ”extrema” uppgifter, med fokus på problemens matematiska innehåll. Det var en öppen analys och inga speciella kriterier formulerades i förväg. Den utfördes enligt följande procedur:

a Upprepade studier av problemen – att läsa problemen om och om igen, att gång på gång föreställa sig problemets kognitiva och matematiska krav på en elev som löser det – till dess att specifika egenskaper framträder, och

b att försöka identifiera dessa egenskaper i andra problem,

c möjligen följt av en revidering av egenskaperna.

Analysen av de två grupperna av extrema uppgifter visade tydligt att det fanns mycket distinkta skillnader mellan flickproblem och pojkproblem. Flickorna presterade lika bra eller lite bättre än pojkarna på

- problem som kräver noggrannhet,
- problem där texten är komplex,
- problem där reflektioner kring strategier och inte beräkningar efterfrågas,
- välkända problem som kan lösas med standardprocedurer,
- problem där operationen och talen är givna och ingen omorganisering är nödvändig,
- problem som rör inköpssituationer.

Ett exempel på ett sådant flickproblem är *Kameraproblemet*[2] som återfinns i slutet av artikeln tillsammans med andra problem. Problemet handlar om en pojke som vill köpa en kamera. Testformuläret innehåller en mängd text som informerar eleven om hur mycket pengar pojken har sparat under fyra på varandra följande månader. Eleverna ska beräkna hur mycket som fattas för att pojken ska kunna köpa kameran. Skillnaden i p-värde för detta problem var -0,04, vilket betyder att skillnaden var till flickornas fördel. Å andra sidan presterar pojkarna klart bättre än flickorna på

- problem som efterfrågar vardagskunskaper om tal och mått,
- problem där stora tal med många nollor används,
- problem där olika tal eller olika måttenheter används,

[2] CITO-testet 1995 – Del 1, uppgift 16, p-värde pojkar 0,76, p-värde flickor 0,80

- problem som ger möjlighet att laborera, ”meka” med tal. (Att ”meka” med tal innebär att tillämpa ”smarta” strategier. Ta till exempel ett problem som ”7980 · 0,25 är ungefär ...” Att lösa problemet genom att ”meka” skulle kunna innebära att dividera med 4 i stället för att multiplicera med 0,25),
- problem som kräver att man resonerar baklänges.

Ett sådant pojkproblem var *Bilproblemet*[3] där eleverna ska bestämma avståndet mellan en viss kilometerstolpe där en bil har stannat och en telefon som finns vid en annan kilometerstolpe. Problemet måste besvaras i meter, medan kilometermarkeringarna anges med decimaler. Detta problem klarade pojkarna mycket bättre. Skillnaden i p-värde var 0,26.

Det förvånande med denna analys var inte bara att skillnader framträdde mellan problem där flickorna lyckades bättre relativt pojkarna och problem där pojkarna överträffade flickorna. Den största överraskningen var att studien, i motsats till vad man ofta antar, avslöjade att det inte är kontextens natur – om den hänför sig till flickvärlden eller pojkvärlden – som var den främsta orsaken till skillnaderna i resultat. I stället visade sig problemens matematiska natur och de därmed sammanhängande kognitiva kraven vara viktigare för att pojkar eller flickor skulle nå bättre resultat.

Vi upptäckte också att det inte bara fanns ett stabilt mönster av egenskaper för de båda problemkategorierna, utan även att flickors och pojkars p-värden var mycket stabila för enskilda uppgiftstyper. Man kan hitta exempel på detta där avläsningar från mätare, som till exempel gasmätare, ska jämföras. Varje år presterade flickorna något bättre än pojkarna på dessa problem.

Belägg för könsspecifika problem och strategier

Resultat från MOOJ, fas IIa

Från ett matematiktest, som genomfördes i sju ”extrema” pojkskolor och sju ”extrema” flickskolor, kom en bekräftelse på upptäckten att vissa problem utförs bättre av pojkar och att andra utförs jämförelsevis bättre av flickor. För problem som lätt kunde lösas på ett ”smart” sätt valde flickorna markant oftare att göra beräkningar på papper. Flickorna använde inte heller så ofta ”smarta” beräkningar vid huvudräkning. För ytterligare detaljer, se Van den Heuvel-Panhuizen & Vermeer (1999).

Ytterligare resultat från två småskaliga klassrumsundersökningar

I denna del diskuteras resultat från två klassrumsundersökningar. Båda bekräftade de tidigare rönen från MOOJ. Den första undersökningen rörde problemet $60 \times 0{,}25$ som gavs till en klass i årskurs 6 i Montfoort. Data samlades in 1999 av Marjolein Kool för en lärarfortbildning baserad på MOOJ.

---

[3] CITO-test 1995 – Del 3, uppgift 3; p-värde pojkar 0,59, p-värde flickor 0,33

Eleverna uppmanades att lösa ett multiplikationsproblem (se sid 153, *60 × 0,25*) som ger goda möjligheter att laborera, "meka" med tal.

Tabell 1. *Svar på* 60 × 0,25

	flickor	pojkar	totalt
korrekt svar	8	11	19
felaktigt svar	6	3	9
oklart svar	1	1	2
	15	15	30

Tabell 2. *Tillämpade strategier vid lösning av* 60 × 0,25

Tillämpad strategi	flickor	pojkar
Uppställning	13	5
6 × 0,25 = 1,50; 10 × 1,50 = 15	–	1
60 ÷ 4 = 15	1	2
40 × 0,25 och 20 × 0,25	–	2
10 × 0,25 = 2,5; 6 × 2,5 = 15	1	3
60 × 0,25 = 30 × 0,5 = 15 × 1	–	1
1 ÷ 0,25 = 4; 10 = 40; 5 = 20	–	1
	15	15

Trots att det inte var så stor skillnad mellan pojkar och flickor i den här klassen när det gällde att komma fram till rätt svar (se tabell 1) så var skillnaden beträffande vilka strategier de använde anmärkningsvärd (se tabell 2). Återigen visade det sig att flickorna hade en klar preferens för en "siffer"-strategi och att pojkarna använde en "mekar"-strategi. Detta kom som en stor överraskning för läraren som var totalt omedveten om att dessa skillnader i angreppssätt förekom i hans klass.

En andra undersökning som ägde rum i en fjärdeklass i Beek avslöjade återigen stora skillnader mellan pojkar och flickor. Data samlades in av Anneke Noteboom 1999. Eleverna fick en överslagsuppgift kallad *Brödproblemet*. Trots att det uttryckligen gavs en vink om att överslagsräkning var tillåten valde de flesta flickor exakta beräkningar, medan pojkarna i allmänhet valde överslagsräkning (se tabell 3). Återigen fann man belägg för könsspecifika strategier vid lösning av aritmetiska problem.

Tabell 3. *Svar och tillämpade strategier. Brödproblemet: Räcker 10 gulden?*

	flickor	pojkar	?	summa
uppskattning	••••	•••••••••	••	15
exakt beräkning	••••••	••		8
oklart	•••	•		4
korrekt svar	13	9	2	24
felaktigt svar	0	2	0	2
oklart svar	0	1	0	1
	13	12	2	27

Internationella rön kring könsspecifika strategier

Internationell forskning har handlat ganska lite om strategiskillnader mellan flickor och pojkar i primary school när de löser matematiska problem. Slutsatserna i dessa studier stämmer dock väl med de resultat som beskrivits ovan.

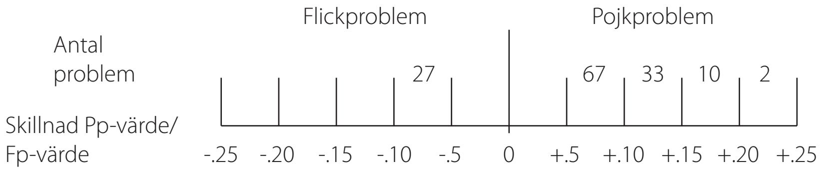
Till exempel fann Fennema, Carpenter, Jacobs, Franke & Levi (1998) klara skillnader i strategier i en longitudinell studie där 44 pojkar och 38 flickor intervjuades sammanlagt fem gånger över en treårsperiod (årskurs 1–3). Jämfört med pojkarna räknade flickorna oftare och använde oftare laborativt material. Pojkarna å andra sidan använde mer frekvent abstrakta strategier som visade en högre nivå av förståelse. I slutet av årskurs 3 använde flickorna flitigare standardalgoritmer. Det fanns ett positivt samband mellan att i de lägre årskurserna kunna skapa egna angreppssätt och att i årskurs 3 kunna lösa komplexa problem. Detta gällde för både pojkar och flickor.

Carr och Jessup (1997) upptäckte ännu fler skillnader i strategier i sin forskning, där 58 elever i årskurs 1 testades flera gånger och fick frågor om den strategi de använt. Det visade sig att det inte fanns några större skillnader mellan pojkar och flickor när det gällde antalet fel, men däremot i deras sätt att arbeta. Flickorna använde sig mycket mer av verktyg, exempelvis kulram, eller räknade på fingrarna, medan pojkarna mer utnyttjade problem som de redan kunde eller trodde att de kunde lösa. I själva verket var dock pojkarna inte mer medvetna om hur de löste problemen än flickorna. Dessa var också mer ängsliga än pojkarna över att inte komma fram till rätt svar. Slutligen var det anmärkningsvärt att flickorna använde hjälpmedel i mindre utsträckning när de arbetade i grupp. Forskarna eliminerade socialt tryck som orsak till detta.

Ytterligare analys av PPON-resultaten 1997

I den senaste PPON-studien som leddes av CITO 1997 var, som tidigare nämnts, pojkarnas matematikresultat bättre än flickornas i slutet av primary school (Janssen, Van der Schoot, Hemker & Verhelst, 1999). Av de 24 mätområdena visade 21 en signifikant skillnad till pojkarnas fördel. Det är värt att notera att flickornas resultat var på ungefär samma nivå som infödda holländska elever från de lägre socialgrupperna. Det är pojkar och flickor, vars föräldrar kommer från Nederländerna och har låg utbildningsnivå. Flickorna hade bättre resultat än pojkarna endast på de två områden som rörde förmågan att utföra operationer (addition och subtraktion samt multiplikation och division), men skillnaderna var inte signifikanta. De största skillnaderna återfanns inom områdena mätning, uppskattning samt baskunskaper och förståelse av tal.

Ytterligare en analys av PPON 1997 gjordes för att hitta fler belägg för om det finns flickproblem och pojkproblem. Frågan var om problemen som användes i denna studie speglade samma könsspecifika karakteristika som återfanns i MOOJ. För att testa dessa karakteristika användes bara resultaten på de uppgifter som hör till tal- och operationsområdena; totalt 9 områden innehållande 308 uppgifter. När skillnaden mellan pojkarnas och flickornas p-värden beräknades för varje uppgift visade det sig återigen att de ”extrema” uppgifterna inte fördelades lika mellan flickor och pojkar (se figur 1).



Figur 1. *Fördelningen av flickproblem och pojkproblem.*

Det var också förvånande att båda grupperna av extrema problem hade samma karakteristika som i MOOJ. Återigen lyckades flickorna bättre på problem

- som krävde en vanlig beräkning,
- som var välbekanta,
- med en komplex text,
- som efterfrågar en strategi och inte ett svar,
- om inköpssituationer.

Jobbproblemet och *Tidningsproblemet*, till exempel löstes i genomsnitt bättre av flickorna. Skillnaderna i p-värden var –0,09 respektive –0,08.

De problemtyper som pojkarna klarade bäst här klarade de också bäst i MOOJ. Pojkarna var klart bättre än flickorna på

- problem som krävde vardagskunskaper om tal och mått,
- problem med stora tal och många nollor,
- problem med olika typer av tal eller olika måttenheter och
- problem som ger möjlighet att ”meka” med tal.

Två exempel på dessa pojkproblem är *Miljardproblemet* och *Mount Everest-problemet*. Skillnaderna i p-värden var 0,18 respektive 0,23. Särskilt intressant och avslöjande var *Mount Everestproblemet*, där eleven skulle beräkna skillnaden mellan jordens högsta och lägsta punkt. Vid första anblicken verkar det vara ett flickproblem eftersom det efterfrågar en precis beräkning, och formuleringen av problemet är ganska komplex. Vid närmare betraktande ser man dock att det stämmer perfekt på ett pojkproblem. Det kräver att man kombinerar positiva och negativa tal, och liksom *Bilproblemet* kräver det att man föreställer sig och modellerar den aktuella situationen, till exempel på en mental tallinje.

Internationella forskningsrön kring könsspecifika problem

Även om frågan om könsrelaterade problem inte hade undersökts i Nederländerna tidigare och inte kopplats till flickors relativt sämre resultat i matematik i primary school, hade existensen av könsspecifika problem redan kommit fram i internationell forskning. Till exempel fann Fennema, Peterson, Carpenter & Lubinski (1990) att flickor fick lika höga poäng som pojkarna på vissa problem, men inte på andra, när de gjorde ett helklasstest i årskurs 1. Resultaten var desamma för den typ av standardproblem som man ofta finner i kursplaner för årskurs 1. Pojkarna hade signifikant bättre resultat när det gällde komplexa problem, problem som kombinerar ett flertal operationer samt de som innehöll irrelevant information. Skolan har oftast ingen direkt undervisning om sådana problem. Att pojkar presterar bättre än flickor på icke-standardproblem kan enligt Fennema m fl tyda på att de har en mycket friare inställning till att lära sig matematik. I en senare longitudinell studie fann dock Fennema, Carpenter, Jacobs, Franke & Levi (1998) nästan inga skillnader i prestationer mellan pojkar och flickor, även när icke-standarduppgifter räknades in. Pojkar lyckades bättre på endast en speciell sorts problem i årskurs 3, och det gällde problem där man får arbeta flexibelt med stora tal.

Slutligen skulle jag vilja framhålla den nyligen publicerade könsfokuserade analysen av TIMSS data (Mullis, Martin, Fierros, Goldberg & Stemler, 2000). Denna analys visade att pojk- respektive flickproblem nästan var i balans i årskurs 4. Pojkarna presterade bättre än flickorna på 33% av uppgifterna och flickorna överträffade pojkarna på 26% av uppgifterna. Sista året i secondary school lyckas de manliga eleverna bättre än de kvinnliga på 87% av uppgifterna i ”mathematical literacy” [4] och på 76% av uppgifterna i avancerad matematik, medan de kvinnliga eleverna inte lyckades bäst på några uppgifter. När det gäller innehållet i uppgifterna visade TIMSS analys att i årskurs 4 och 8 var pojkar bättre på problem som handlade om tid och avstånd och som krävde ett speciellt angreppssätt eller en speciell strategi. Flickor i de årskurserna fick de

[4] Mathematical literacy är ett begrepp som, framför allt i anglosaxiska länder, i allt större utsträckning kommit att ersätta begreppet numeracy. Dessa termer ges olika innebörder men gemensamt är att de används för att beteckna en individs förmåga att tillämpa sitt matematikkunnande i olika sammanhang (vardagsliv, arbetsliv etc). Ibland används också begreppet funktionella matematikfärdigheter.

bästa resultaten på uppgifter som innehöll beräkningar med vanliga algoritmer och användning av standard- och rutinmatematik. De uppgifter där de manliga eleverna hade bäst resultat under det sista året i secondary school, innehöll

– procent,
– rumsliga resonemang,
– att beräkna area,
– att läsa av kartor och diagram,
– att tolka information i en graf,
– att förstå sannolikhet och
– problemlösningsbegrepp.

Diskussion

Denna artikel kan inte ge fullständigt svar på frågan varifrån skillnaderna mellan pojkar och flickor i matematik på primary school-nivå i Nederländerna kommer. Men den avgränsade granskningen av de matematiska problemen har fått oss att fundera över vår matematikutbildning. Hur är det med de innehållsområden och matematiska aktiviteter där flickorna släpar efter? Om jag för tillfället begränsar mig till den holländska kursplanen för primary school gjorde MOOJ att vi fick upp ögonen för några svaga områden i vårt utbildningssystem.

Vi kanske värdesätter sådant som att ”meka” med tal, ”smart” användning av talrelationer, kunskap om mätning i vardagen och uppskattning, men det är i realiteten svårt att peka på exakt när vi undervisar om dessa. Till exempel kan man inte hitta någon systematiskt strukturerad inlärningsgång för området uppskattning i holländska läroböcker. Det innebär att när det gäller dessa områden lämnar vi eleverna att lita till sig själva, sin egen förmåga och potential. Det kan vara detta som ger pojkarna en fördel framför flickorna. Det har påpekats ett flertal gånger att flickor klarar sig relativt bra på välkända problem, som utgör en del av den vanliga kursplanen. Då lyckas flickorna bra även på problem som inbegriper överslagsräkning, också i Nederländerna.

Det motstridiga i dessa rekommendationer är att en förbättrad utbildning inte kommer att leda till en utjämning mellan pojkar och flickor. Pojkar kommer ju också att dra fördel av bättre utbildning. Detta ska dock inte hindra oss från att förbättra undervisningen där det är möjligt. Utjämnade resultat bör inte vara det yttersta målet. Vad som definitivt inte är acceptabelt är dock att utbildningen inte är könsneutral. Utbildningen bör erbjuda alla barn – flickor och pojkar – en optimal matematisk lärandemiljö. Genom att studera utbildningen och dess resultat ur flickornas perspektiv fann vi några starka indikationer på hur vi kan förbättra matematikutbildningen för både flickor och pojkar.

En klassrumsaktivitet

I det följande beskrivs en aktivitet som kan användas av lärare för att undersöka om pojkar och flickor i klassen skiljer sig åt när de löser aritmetiska problem. Denna aktivitet är avsedd för elever i årskurs 6, men kan också passa i tidigare eller senare årskurser. Problemen som ska presenteras för eleverna finns i slutet av artikeln.

Ett antal viktiga frågor kan uppstå ur denna aktivitet:

- Hur bekanta är eleverna med problem som kräver vardagskunskap om tal och mätning?
- Hur bekanta är eleverna med problem där man kan ”meka” med tal?
- Hur bekanta är eleverna med överslagsproblem?

För att anpassa undervisningen till flickor ska problem man använder ha en flickvänlig kontext, företrädesvis dockor och blommor, det tror många räcker. Nya forskningsrön visar att problemens matematiska natur också spelar roll. När det gäller vissa problem kan flickor vara akterseglade utan att läraren märker det. Med den här aktiviteten kan man förändra detta. Det är dock viktigt att inte missförstå syftet. Att söka efter könsskillnader i problemlösning och att finna att vissa problem löses bäst av antingen pojkar eller flickor betyder inte att det finns problem för flickor och problem för pojkar. Verkligen inte! Det finns bara problem för flickor *och* pojkar.

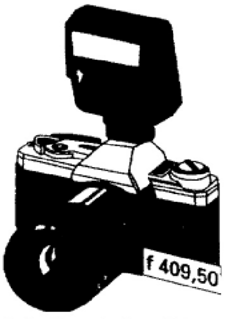
Riktlinjer för klassrumsaktiviteten

1. Lös problemen själv. Vare sig du eller dina elever får använda papper och penna, utom för *60 × 0,25-problemet* och *Brödproblemet*.
2. Beskriv för varje problem vilken matematik som krävs för att lösa det.
3. Beskriv för varje problem hur dina elever kommer att lösa det.
4. Förutsäg för varje problem om det kommer att vara någon könsskillnad i procentandelen korrekta svar i din klass.
5. Förutsäg för varje problem om det kommer att vara någon könsskillnad i de strategier dina elever kommer att använda.
6. Ange vilka konsekvenser dina iakttagelser kan få för din undervisning.

Kameraproblemet

Jelle vill köpa den här kameran. Han sparar

i januari	40,75 gulden
i februari	39,20 gulden
i mars	75,15 gulden
i april	80,95 gulden



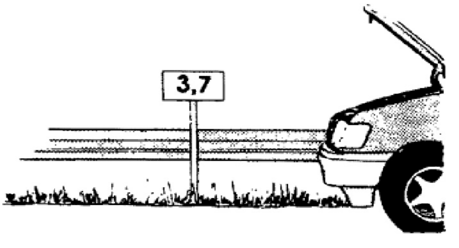
Hans pappa ska betala det som fattas.
Hur mycket ska pappan betala?

A 173,45 gulden C 233,55 gulden
B 173,55 gulden D 273,45 gulden

Bilproblemet

Telefonen för att ringa efter service finns vid 3,4-km-stolpen.
Hur många meter är det från 3,7 km-stolpen?

A 0,3 m C 30 m
B 3 m D 300 m



Jobbproblemet

På en fabrik kommer 417 jobb av sammanlagt 1309 att försvinna.
Hur många jobb blir det kvar?

________ jobb

Miljardproblemet

3 ½ miljard är en avrundning av

A 3 525 428 109
B 34 513 725
C 3 546 892
D 346 148

Brödproblemet

Lieke har en sedel på 10 gulden. Hon ska köpa 5 limpor. Bröden kostar 1,98 gulden styck. Har Lieke tillräckligt mycket pengar?

Detta problem kan lösas med en ungefärlig eller en exakt beräkning. Skriv ner hur du tänker.

Tidningsproblemet

Herr DeVries och Fru Zomers prenumererar båda på denna tidning. Herr de Vries betalar per månad och Fru Zomers betalar per år. Hur mycket mer än Fru Zomers betalar Herr De Vries?

__________ gulden.

Stockeborgsposten

Prenumeration

Namn:
Adress:
Postnummer:

Jag vill betala:

- ❑ per månad 35,50 gulden
- ❑ per kvartal 98,50 gulden
- ❑ per halvår 186,50 gulden
- ❑ per år 365,50 gulden

Mount Everestproblemet

Den högsta punkten på jorden är på Mount Everest, vars höjd är 8 848 m över havet. Den lägsta punkten på jordens yta ligger i Stilla havet och är 11 034 m under havsnivån. Hur stor är skillnaden mellan den högsta och den lägsta platsen på jorden?

________ m

60 × 0,25-problemet

Beräkna:
$60 \times 0{,}25 =$

Förklara tydligt hur du kom fram till ditt svar.

Referenser

Alberts, R.V.J. & Noordermeer, L. (2002). *Examenverslag vbo/mavo/havo/vwo 2002*. Arnhem, the Netherlands: Citogroep.

Arnot, M., James, M., Gray, J. & Rudduck, J. (1999). *Review of research on gender and educational performance*. London: The Stationery Office/Office for Standards in Education.

Bokhove, J., Van der Schoot, F. & Eggen, Th. (1996). *Balans van het rekenonderwijs aan het einde van de basisschool 2. Uitkomsten van de tweede peiling rekenen/wiskunde einde basisonderwijs*. Arnhem, Nederländerna: Cito.

Carr, M. & Jessup, D.L. (1997). Gender differences in first-grade mathematics strategy use: Social and metacognitive influences. *Journal of Educational Psychology*, *89* (2), 318–328.

Fennema, E., Peterson, P.L., Carpenter, T. & Lubinski, C. (1990). Teachers' attributions and beliefs about girls, boys, and mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 55–69.

Fennema, E., Carpenter, T.P., Jacobs, V.R, Franke, M.L. & Levi, L.W. (1998). A longitudinal study of gender differences in young children's mathematical thinking. *Educational Researcher*, *27*(5), 6–11.

Geary, D.C. (1996). Sexual selection and sex differences in mathematical abilities. *Behavioral and Brain Sciences*, *19*, 229–284.

Glaser, B.G. & Strauss, A.L. (1967). *The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine Publishing Company.

Hyde, J.S., Fennema, E. & Lamon, S.J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107, 139–155.

Janssen, J., Van der Schoot, F., Hemker, B. & Verhelst, N. (1999). *Balans van het rekenonderwijs aan het einde van de basisschool 3. Uitkomsten van de derde peiling in 1997.* Arnhem, the Netherlands: Cito.

Leder, G.C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. I D.A. Grouws (Red), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (s 597–622). New York: Macmillan.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Beaton, A.E., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L. & Smith, T.A. (1997). *Mathematics achievement in the primary school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Fierros, E.G., Goldberg, A.L. & Stemler, S.E. (2000). *Gender differences in achievement*. Chestnut Hill, MA: TIMSS International Study Center.

Shaw, L. (2002, 30 september). Schools' gender gap concerns now is boys. *Seattle Times*.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & H. Vermeer (1999). *Verschillen tussen meisjes en jongens bij het vak rekenen-wiskunde op de basisschool*. Utrecht, the Netherlands: CD-β Press, Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. I J. Anghileri, *Principles and practices in arithmetic teaching* (s 49–63). Buckingham: Open University Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). On the search for gender-related differences in Dutch primary mathematics classrooms. I N.A. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Red), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (Vol. 4, s 323–330). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Wijnstra, J.M. (1982). Enkele nieuwe gegevens over verschillen in toetsprestaties tussen jongens en meisjes. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 7, 43–46.

Wijnstra, J. (Red). (1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool*. Arnhem, the Netherlands: Cito.

Måste man vara intresserad av matematik?

VICTOR FIRSOV

En central fråga som deltagarna fick på NCM:s konferens var hur man ska göra för att maximera intresse och möjligheter för elever att lära sig matematik. Det svar jag ger här grundar sig på en analys av sovjetisk och rysk forskning inom kognitiv psykologi och didaktik. För att utveckla mina argument diskuterar jag först varför intresse för matematik inte behöver vara en grundläggande princip i matematikundervisning. Därefter beskriver jag Sovjets skolmatematik och hur intresse för ämnet utveckladess. Den sista delen ägnar jag åt problem kring undervisning av elever som saknar intresse för matematik.

Intresse för matematik som grundläggande princip

Många matematiklärare diskuterar gärna hur man ska göra för att utveckla elevernas intresse för ämnet, se t ex Howson & Kahane (1990). De tror att eftersom de själva var intresserade av matematik från någon gång kring 14-årsåldern, borde även deras elever vara det. Eftersom de lyckades i sina matematikstudier kan även deras elever göra det om lärarna lyckas väcka deras intresse för matematik. Vidare finns det så många "intressanta" (för lärare) böcker om matematik och intressanta problem som kan få eleverna att lyckas i ämnet om de bara får syn på böckerna och problemen.

Jag anser att vi lurar oss själva genom att tänka så. Att tro att elevernas inställning till ett ämne måste vara densamma som vår egen är ett misstag. Många elever kommer aldrig att intressera sig för matematik, några kommer rent av att avsky det, och detta är en rättighet som lärare måste respektera (Firsov, 1992).

Jag vill också tillägga att det är ett misstag att dra slutsatsen att eftersom många barn under de första skolåren uppger matematik som sitt favoritämne, måste man sträva efter att underhålla detta intresse så att det består genom elevens hela skolgång. Faktum är att analyser visar att när yngre barn uppger matematik som favoritämne innebär detta ofta att de är nöjda med det de har presterat i ämnet, inte att de har något genuint intresse för ämnet.

Jag instämmer i att om ett barn är intresserat av något så kommer det att lyckas i lärandet (figur 1). Det finns en naturlig vilja att utnyttja denna intresseprincip maximalt. Konsekvensen blir att matematiklärare ägnar mycket tid och energi åt att försöka påverka elevernas intresse för matematik. Alltför ofta blir dock resultatet av detta allt annat än imponerande och de få elever som påverkas positivt är de som redan från början hade intresse för ämnet. Dessutom verkar det som om dessa ansträngningar från lärare ofta har motsatt effekt och snarare ökar elevernas motvilja för matematik.

intresse ⟶ **framgång**

Figur 1. *Intresseprincipen*

Intresse för ett ämne är ofta en tillräcklig men inte en nödvändig förutsättning för produktivt och lyckat lärande. Alltför ofta går inte principens förhållanden att överföra på undervisning i praktiken.

Vi vet inte vilka faktorer (genetiska, fysiska, psykologiska, pedagogiska) som ligger bakom att matematik, trots alla våra ansträngningar, förblir ointressant för vissa barn. Resultat från forskning inom psykologi och medicin tyder också på att intresse för ämnet inte återfinns bland de främsta motiven för lärande hos någon elevåldersgrupper. Vi kan dela upp elever i följande åldersgrupper

1 barndom, ungefär 6 – 10 årsåldern,

2 sen barndom och tidiga tonåren, 10 – 15 årsåldern,

3 sena tonåren, 15 – 18 årsåldern.

(Leontyev, 1983)

Ett av de särskiljande dragen hos dessa åldersgrupper är hur de prioriterar olika motiv för att vilja eller vägra lära. För elever på motsvarande lågstadiet är behovet av vägledning från en vuxen, läraren, ett prioriterat motiv för att lära sig. Detta behov ligger också till grund för att avgöra när en elev är redo att börja skolan. För elever i den mellersta åldersgruppen ovan är det den egna personlighetsutvecklingen som är det främsta motivet. Som kontrast till detta har elever i gymnasiet motiv av starkt pragmatisk karaktär knutna till nyttan av kunskaperna i ett framtida liv (figur 2).

Åldersgrupp	Främsta motiv för lärande
Barndom	Att få vägledning av en vuxen
Sen barndom, tidiga tonår	Att utveckla sin personlighet
Sena tonår	Att förvärva användbar kunskap

Figur 2. *Främsta motiv för inlärning i olika åldersgrupper*

Detta är visserligen en starkt förenklad bild av en mycket invecklad interaktion mellan dessa motiv (Heckhauzen, 1980), men grundtanken är riktig. Om vi utgår från denna idé kan vi hävda att ett intresse för att lära sig ett ämne inte är väsentligt för särskilt många elever.

Någonstans i mitten av tonåren upplever barnet en överraskande period med spontant uppdykande intressen inom olika områden de möter både i och utanför skolan. Dessa intressen är flyktiga – barnet börjar se till sin omvärld för att hitta sin egen plats i den. Men på grund av flyktigheten är det svårt att förutse vilka och hur många fördjupande ämneskurser de kommer att vilja studera längre fram. Det är emellertid viktigt för den personliga utvecklingen att barn i mittengruppen får gott om möjligheter att få smakprov på och utforska vad världen har att erbjuda. En väl vald provkarta av potentiellt intressanta ämnen kan resultera i varaktiga intressen och avancerade studier i ett antal av dem. För de äldsta eleverna, den tredje åldersgruppen, blockeras intressen alltför ofta av pragmatiska motiv: användbara ämnen kan verka ganska ointressanta och intressanta ämnen oanvändbara.

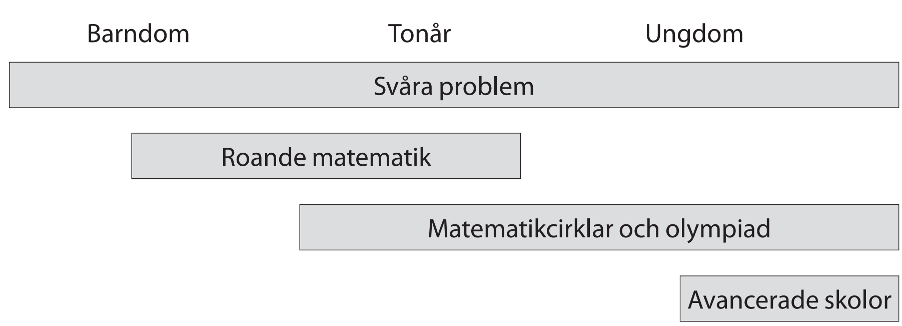
Intresse för ett ämne är alltså något ovanligt och absolut inte en nödvändighet. Då det förekommer är det verkligen en unik gåva för såväl lärare som elev och bör som sådan skyddas och uppmuntras. Vi kan inte förvänta oss att alla elever ska delta i matematikundervisningen med intresse. Om vi anser att undervisningen är en villkorslös förmån, nödvändig för alla elever, borde vi vägra att sätta intresse som ledande princip inom utbildning. Istället för att fråga oss hur vi kan maximera intresset för matematik borde vi ställa två mer precisa frågor:

– Hur kan vi väcka och utveckla intresse för matematik?

– Vad kan vi erbjuda de elever som helt saknar intresse för matematik?

Att utveckla matematikintresse: Erfarenheter från Sovjet

Skolorna i före detta Sovjetunionen kan ge exempel på hur elevers intresse för matematik kan utvecklas (figur 3). Analyser av positiva och negativa erfarenheter ger oss möjlighet att sätta upp riktlinjer för arbetet och kan visa på dolda hinder som vi kan möta under arbetets gång.



Figur 3. *Utveckling av intresse: Den sovjetiska modellen*

I backspegeln kan vi slå fast att den långa traditionen att inkludera fler *svåra matematiska problem* i läroböckerna var grundläggande i detta arbete. Eleverna kunde hitta dessa utmaningar i varje kapitel i alla läroböcker i matematik. Lärarna betraktade lösning av sådana problem som en indikator på elevens framgång och för eleven låg det prestige i att lösa dem.

Roande matte var en annan typ av aktiviteter som förekom i böcker för både den första och andra åldersgruppen. Ännu idag är berömda böcker ur serien ”Roande matematik” av Y. Perelman, omåttligt populära bland både barn och deras föräldrar (Perelman, 2003).

Det som utgjorde kärnan i modellen var dock *Matematikcirklar* som anordnades på många skolor och inom fristående kursverksamhet. Dessa cirklar handlade inte om att barnen ”studerade” avancerad matematik och lärarna ställde inga krav på formell, teoretisk matematik. Den främsta inlärningsmetoden var lösning av avancerade matematiska problem. Lektionerna var sällan fokuserade kring ett enda tema. Aktiviteterna i matematikcirklarna understöddes av speciellt utgivna bokserier såsom ”Problemsamlingar från matematikcirklar” och ”Populära föreläsningar i matematik” (verkliga föreläsningar av stora matematiker, skrivna för barn). Den välkända tidskriften *Quant* är sprungen ur dessa publikationer.

Som avslutning på cirklarna fanns *Matematikolympiader* på skolor och universitet (The USSR Olympiad Problem Book, 1962). Då de blev en del av skolbyråkratin, slog de olyckligtvis an en tävlingsinriktad ton som inte ingått i den ursprungliga idén. Olympiaderna spelade emellertid en framträdande roll för att utveckla intresse för matematik samt i urvalet av speciellt begåvade barn.

Jag vill betona att i det sovjetiska system som jag beskrivit var de grundläggande delarna frivilliga för eleverna. De kunde välja att lösa svåra problem eller inte, kunde välja att läsa böcker eller inte, kunde välja att delta i matematikcirklar och olympiader eller inte. Barnen kunde ta egna, individuella beslut om deltagandet – inga av modellens olika aktiviteter var obligatoriska. Vidare var det finansiella stödet för modellen till en början minimalt, lärarna fick inget betalt för att leda cirklar och olympiader sponsrades endast delvis och då genom statliga bidrag.

De omständigheter som bidrog till att rasera en sådan effektiv modell behöver uppmärksammas. Som så ofta är fallet drevs modellen till en början av goda intentioner. I mitten av 60-talet beslöt myndigheterna att införa ett ganska strikt system av fördjupande, valfria kurser för elever som uppvisat intresse, fallenhet och förmåga i olika skolämnen. Kravlistor på hur lyckade kurser skulle utformas ställdes upp och lärare fick betalt för att undervisa dessa kurser. När man införde obligatorisk närvaro på kurserna (åtminstone under ett år efter att eleverna hade valt dem), började elevernas intresse avta (Firsov m fl, 1987). Endast matematkintresse var en för svag bevekelsegrund för eleverna att delta i långvariga studier i ämnet. Intresse blomstrar endast i frihet och vissnar vid minsta tvång, bildligt talat.

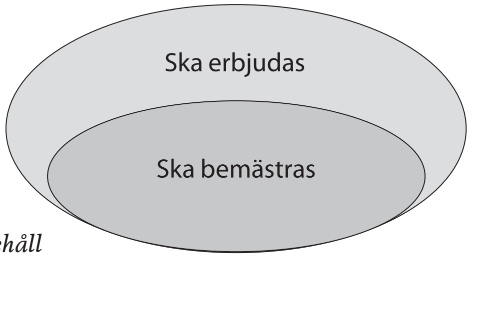
Som konstrast till detta har avancerade matematikskolor för gymnasieelever varit relativt framgångsrika. Den första organiserades 1959 av S. Shwarzburd.

Framgången verkar ha berott på såväl det stabila intresset hos matematiskt kompetenta elever som på elevernas pragmatiska behov, en önskan att delta i kurser för att bättre förbereda sig för framtida studier i matematik (Firsov, 1993b). Införandet av både de ”byråkratiserade” kurserna beskrivna i stycket ovan och avancerade skolor resulterade tyvärr i att det gamla ”frivilliga” systemet med matematikcirklar förstördes. Eleverna har numer inte tid att delta i dem.

Om matematik inte är intressant

Förhoppningar om att utveckling av intresse för matematik även skulle göra det lättare för alla elever att ta till sig undervisningen är således ogrundade. Det påverkar enbart en liten del av eleverna i önskad riktning. För att lösa problemet att utbilda den stora massan elever behöver vi revidera våra uppfattningar om intressets roll i lärandet, uppfattningar vi fått med oss från den traditionella, ”koniska” skolan (en skola där en mindre lyckad elev faller ifrån). Istället för att jaga det högtflygande målet att utveckla grundläggande intresse för matematik bör vi ägna uppmärksamhet åt mer blygsamma mål som att göra *just den här matematiklektionen* mer intressant för *just den här eleven*.

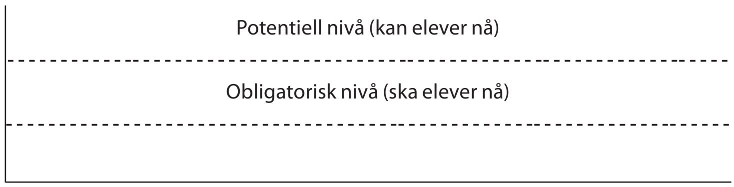
Det finns givetvis inte något skäl att förkasta alla de rekommendationer som vanligtvis används för att stimulera elevernas intresse för matematik, trots att dessa har begränsad verkan. Det är mycket möjligt att väcka en elevs intresse för lärande även om eleven inte har något ursprungligt intresse för matematik i sig. För att lyckas med det behöver vi iaktta de prioriterade motiv för inlärning jag tog upp tidigare. Speciellt för elever i åldern 10–15 år är framgång i lärandet det viktigaste motivet. Framgång i lärandet leder till intresse för lärandets resultat. Endast ett fåtal lärare inser att en mängd kunskapsområden är omöjliga att lära sig utan ett sådant motiv, det är t ex svårt att föreställa sig en elev med ett genuint intresse för addition av bråk. Å andra sidan blockeras intresset för ämnet hos en elev som misslyckas med att lära. Men eftersom det är omöjligt att hoppa av en ”cylindrisk” skola, får barnet ändå sitta med under avskydda lektioner och utveckla mindervärdeskomplex istället för tilltro till de egna färdigheterna. (En ”cylindrisk” skola håller kvar eleverna, istället för att låta dem hoppa av efter misslyckanden så som den ”koniska” skolan ofta tillåter.) Elevens intresse för resultatet av lärandet kan därför endast garanteras då detta resultat står i rimlig relation till elevens förmåga. För att uppnå detta har jag tidigare rekommenderat att man delar upp innehållet i alla skolämnen i två delar: det som ska erbjudas (elevernas rättighet), och det som ska bemästras (elevernas ansvar) (Firsov, 1993a).



Figur 4. *Differentiering av undervisningsinnehåll*

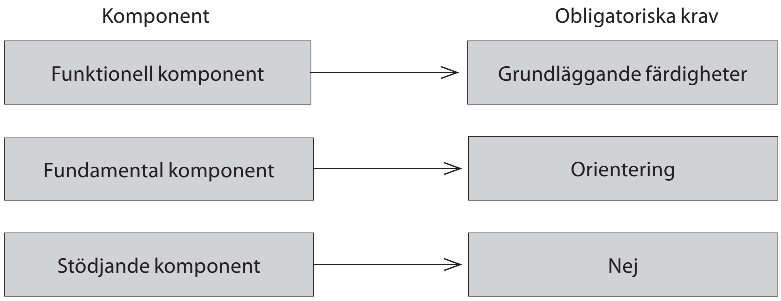
Denna indelning uttrycker en uppdelning av krav i termer av att behärska undervisningens innehåll på potentiella och obligatoriska nivåer (figur 5).

Den potentiella nivån bestämmer vilka möjligheter skolan ska erbjuda för att elevens rättighet till utbildning ska tillgodoses. En elev som behärskar matematiken på den potentiella nivån ska erhålla högsta möjliga betyg. Den obligatoriska nivån bestämmer den undre gränsen för lyckade studier. En elev som behärskar matematiken på den obligatoriska nivån ska erhålla lägsta betyget för godkänt. Specificerade krav för den potentiella och den obligatoriska nivån har fastställts i State Educational Standards (Russian Ministry of Education, 2002).



Figur 5. *Differentiering av krav. Didaktiska komponeneter*

En definition av den obligatoriska nivån kan grundas på en uppdelning av utbildningens innehåll som speglar dess pragmatiska och dess grundläggande mål. Den del av utbildningen som representerar den *funktionella komponenten* speglar de grundläggande mål som kan relateras till kommunikativa, intellektuella och sociala färdigheter på baskunskapsnivå. Om dessa mål uppnås innebär det en socialisering; en framtida möjlighet för eleverna att delta i modernt samhällsliv. Det utbildningsinnehåll som hör till den *fundamentala komponenten* ger möjlighet att nå mål som rör utveckling av den mänskliga kulturens grundläggande idéer och värden. Den funktionella och den fundamentala komponenten är inte oberoende av varandra, de överlappar varandra inom många viktiga områden. Bland dessa kan nämnas begrepp som tal, symmetri och bevis. Till sist har vi en tredje komponent i utbildningsinnehållet, den *stödjande komponenten*, som verkar som illustration till eller som område för utveckling av faktorer inom de övriga komponenterna. Denna komponent har inte något egentligt undervisningsvärde och kan variera avsevärt. Till exempel är idén om invers funktion relaterad till den allmänna utbildningens fundamentala komponent. En specifik uppnådd nivå rörande invers funktion krävs dock hos de elever som vill gå vidare till högre utbildning inom matematik. Vi fastslår obligatoriska nivåer för de olika komponenterna genom att se till motsvarande utbildningsmål (figur 6).



Figur 6. *Förhållandet mellan utbildningens komponenter och obligatoriska krav*

Vi är skyldiga att informera eleverna om vilket utbildningsmaterial de ska bemästra och vilket material de kan välja att studera om de så vill. Detta förhållningssätt tillåter läraren att organisera undervisning efter elevernas individuella intressen för matematik utan att samtidigt sätta för stor press på samtliga. Detta representerar även den grundläggande pedagogiska tekniken hos nivågruppering och ger vissa specifika, pedagogiska effekter. Vi kan framför allt hänvisa till sådana som upprättande av ett slags pedagogisk överenskommelse om undervisningens innehåll, individuella val om vad eleverna ska lära sig, minskad belastning på lärarna, positiv motivation för lärande och tillhandahållande av stöd och kontinuerlig utbildning. Detta synsätt ger utrymme för elever att organisera sig i frivilliga aktiviteter efter eget intresse för matematik istället för att sätta press på alla elever.

Hur kan en lärare sätta detta i verket?

Implementering av ovan nämnda system med olika nivåer i undervisningen blir bara möjlig om ett motsvarande undervisnings- och metodmaterial finns tillgängligt. Det vore idealiskt om motsvarande struktur fanns med i läroböckerna. Än så länge kan vi bara tala om hur man använder sig av några utmärkande principer för differentiering på olika nivåer.

Öppenhet om obligatoriska krav

Under varje fas av inlärningen behöver eleven vara informerad om vad som ska behärskas (obligatorisk nivå) och vad som finns att lära på frivillig basis (potentiell nivå). Eleverna ska informeras om detta på förhand (figur 7).

Figur 7. *Öppenhet om de obligatoriska kraven*

Teoretiskt innehåll representerar i den ryska traditionen de obligatoriska krav som gäller användning av teoretisk kunskap vid lösning av enkla problem. Exemplen nedan visar skillnader mellan förväntningarna på den obligatoriska och på den potentiella nivån.

Obligatorisk	Potentiell
Faktoruppdelar ett heltal i 2 – 3 primtalsfaktorer.	Förklarar vad primtalsuppdelning innebär.
Anger grad för ett polynom.	Definierar vad grad av ett polynom är.
Finner sidan i en rektangel om diagonalen och den andra sidan är given.	Formulerar och bevisar Pythagoras sats.
Använder sinus för dubbla vinkeln i omvandlingen av ett enklare trigonometriskt uttryck.	Minns och kan härleda uttryck för sinus av den dubbla vinkeln.

Problem på den obligatoriska nivån ska finnas med i varje avsnitt och varje elev förväntas kunna lösa dem. Eleverna ska få smakprov på den obligatoriska nivåns uppgifter vid början av varje nytt avsnitt, som en lista över vad som är obligatoriskt att lära sig. Här är ett exempel på obligatoriska kunskaper om andragradsekvationer:

Lös ekvationerna:

$3x^2 + 2 = 14$ $\qquad 5x - 2x^2 = 0$ $\qquad 2x^2 + x - 2 = 0$

$3 + 7x = 2x(2 - x)$ $\qquad \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1,5 = 0$ $\qquad \frac{1+8x}{2} = 2 + x^2$

Dessa exempel på ekvationer visar eleven vilken svårighetsgrad som gäller för prov på den obligatoriska nivån. Det betyder att en elev inte behöver kunna lösa svårare ekvationer än så för att erhålla godkänt betyg.

Hur beskrivs den obligatoriska nivån?

Jag rekommenderar att den lägsta obligatoriska nivån för teoretiskt innehåll uttrycks i förmågan att använda teoretisk kunskap vid lösning av grundläggande problem. Det är inte nödvändigt att formulera definitioner på den grundläggande nivån men det är viktigt att känna igen och skapa motsvarande objekt. Eleven behöver inte kunna bevisa komplexa satser men ska kunna använda sig av dem i sin problemlösning. De behöver inte lägga invecklade formler på minnet men ska, om det behövs med hjälp av läroböcker, kunna använda sig av dem vid uträkningar. Alltså visas kunskapen genom färdigheter och läraren kan utvärdera kunskaper genom att se eleven lösa problem kopplade till särskilda färdigheter. De normerade problemen visar eleverna vilka obligatoriska krav de ställs inför (Denishcheva m fl, 1989).

Vi måste komma ihåg att vårt mål är att en svag eller ointresserad elev ska få uppleva framgång i sitt lärande. Vi har konstaterat att detta är det enda sättet att hos just dessa elever väcka intresse, om inte för matematik i sig, så åtminstone för inlärningsprocessen och resultatet av matematikstudier. Trassla därför inte till det och sätt ett golv som utgår från en redan existerande nivå för svaga eller omotiverade elever. Räds inte att sätta gränsen för lågt utan var tvärtom orolig för att sätta den för högt. Det viktigaste att ta hänsyn till är att eleverna får en möjlighet till fortsatta studier.

Att införa en lägsta nivå för resultat på den obligatoriska nivån ska inte ses som en sänkning av kunskapsnivån. Tvärtom, i undervisningen ska som vanligt definitioner formuleras, matematiska satser bevisas och eleven ska få möjligheter att lösa mer avancerade matematiska problem. Det är emellertid elevens rätt att få reda på vad som inte är obligatoriskt och att de själva kan välja att bemästra det eller inte. Sådant ska elever och lärare komma överens om i förväg. En elev kan helt frivilligt välja att arbeta med ett mer avancerat material. Som jag nämnde tidigare är detta det främsta villkoret för att utveckla intresse för ämnet.

Differentiering mellan den obligatoriska och avancerade nivån

För att kunna ha överblick över de obligatoriska och mer avancerade nivåerna behöver man särskilja kunskaper på grundläggande nivå och kunskaper på mer avancerad nivå. Till exempel ska utvärdering av kunskap på grundläggande nivå vara obligatorisk medan utvärdering på högre nivåer endast ska ske om den är frivillig. Framförallt behöver prov på obligatoriska kunskaper skiljas från prov på de frivilliga delarna.

Referenser [1]

Denishcheva, L. m fl (1989). *The planning of compulsory results of mathematics education* (på ryska). Moskva: Prosveshchenye.

Firsov, V. (1992). Barn har rätt att hata matematik. *Lärarnas tidning, 2*.

Firsov, V. (1993a). Humanization and democratization of compulsory education on the base of level differentiation. I Firsov, V. (Red), *The level differentiation of education* (på ryska). Moskva: Perspectiva.

Firsov, V. (1993b). Schools for gifted: The Russian experience. *Nämnaren (20)*2, 40.

Firsov, V. m fl (1987). *The state and prospects of mathematics facultative courses* (på ryska). Moskva: Prosveshchenye.

Heckhauzen, H. (1980). *Motivation und handeln*. New York: Springer-Verlag.

Howson, G. & Kahane, J.-P. (Red). (1990). *The popularization of mathematics. Study conference held in Leeds, UK. September 1989.* Cambridge: University Press.

Leontyev, A. (1983). *Selected psychological works* (två volymer, på ryska). Moskva: Pedagogica.

Perelman, Y. (2003). *Amusing algebra. Amusing geometry* (på ryska). Moskva: Astrel.

Russian Ministry of Education (2002). *The State educational standards. Federal component* (på ryska). Moskva: Author.

The USSR Olympiad problem book (1962). New York, W.H. Freeman.

Vinogradova, N. m fl (2000). *The concept of primary education* (på ryska). Moskva: Russian Ministry of Education.

[1] Vi har här behållit författarens egen översättning av titlarna från ryska till engelska.

Relevans och nytta

PAUL ERNEST

I denna artikel presenterar jag min uppfattning om vad det innebär att kunna matematik och, i synnerhet, vilka förmågor, färdigheter och attityder som är aktuella för studerande på olika nivåer. Jag skiljer mellan nytta och relevans och hävdar att det som är "relevant matematik" för den som lär måste relateras till personliga mål och intressen. Den huvudsakliga idén är: Att uppskatta och värdesätta matematik är viktigt, likaväl som kunskaper och färdigheter i ämnet. Avslutningsvis ger jag förslag på aktiviteter som lärare kan använda i klassrummet för att öka elevers uppskattning av matematik.

Under ett drygt årtionde har jag bedrivit forskning i matematikutbildningens filosofi (Ernest,1991). Det finns flera olika aspekter att fokusera, men ett centralt och återkommande tema för mig är matematikutbildningens mål. I denna artikel tar jag upp det på nytt, men för in en diskussion om relevans och nytta i frågan om vad det innebär att kunna matematik.

Frågan "Vad innebär det att kunna matematik?" kan inte helt skiljas från frågorna "Vilken matematik är värd att kunna?" och "Vilka är matematikundervisningens mål och syften?" Att kunna matematik är varken något neutralt eller slumpartat. Ingen kan all matematik, så frågan om vilken del av matematiken kunnandet handlar om blir avgörande. Samtidigt innebär inte "att kunna" något värdeneutralt, för hur avgörs "att man kan en speciell del av matematiken" i reell mening? Innebär det att kunna komma ihåg och återge påståenden muntligt eller skriftligt, att kunna använda regler och procedurer, att kunna tillämpa kunskap vid problemlösning, att kunna relatera matematiska idéer till andra aspekter av kunskap och kultur, eller någon annan förmåga?

Denna diskussion visar "att kunna matematik" måste ses i ett vidare socialt sammanhang. Det innefattar såväl matematikens natur och karakteristika som matematikundervisningens sociala kontext, dess mål och önskade resultat i termer av de lärandes färdigheter, attityder, förutsättningar och förmågor.

De stora frågorna om matematikens natur och karakteristika, som det redan skrivits så mycket om, (t ex Ernest 1991, 1998; Skovsmose, 1994; Restivo, 1992) lämnar jag denna gång därhän. I stället fokuserar jag på matematikundervisningens sociala kontext och dess individuella resultat. Vad bör en person med idealt matematikkunnande kunna göra? Det finns naturligtvis inte ett enskilt svar på detta, inte ens om man utgår från ett enda perspektiv, utan många olika svar för olika samhällen, individer, åldrar, stadier och så vidare. Jag bortser här från skillnader mellan olika samhällen och ursprungsländer och fokuserar på ett idealiserat, utvecklat, postindustriellt, västligt demokratiskt land, säg Sverige (utan att mena att det är idealt i betydelsen perfekt). Likaså kommer jag att, i stället för att betrakta olika åldrar, tänka mig någon som är 16 – 18 år gammal och närmar sig, når eller just har passerat slutet på de obligatoriska skolåren. I stället för att se på olika individer med deras olika yrkesplaner och projekt, inklusive fortsatta högre studier för vissa och universitetsmatematik för en minoritet, fokuserar jag på allmänna frågor och vad de alla har gemensamt i sina grundläggande förutsättningar (anlag), förmågor med mera. Senare blir det dock nödvändigt att återkomma till frågan om de lärandes varierande motivation och yrkesplaner eftersom de aldrig kommer att uppfatta en kursplan i matematik som relevant om den inte tar hänsyn just dessa frågor.

Vad det innebär att kunna matematik i bemärkelsen att ha vissa matematiska förutsättningar och förmågor kräver ytterligare förklaring och diskussion. För mänskliga anlag och förmågor måste alltid ha ett ändamål för vissa aktiviteter, syften och funktioner. Säger jag därmed att ”ha kunskap i matematik” är att ha nyttig eller relevant kunskap? Svaret på detta är komplext, och för att förklara måste jag göra en noggrann åtskillnad mellan *nytta* och *relevans*.

Som jag förstår termen, betyder nytta en snäv och begränsad användbarhet som kan påvisas omedelbart eller i det korta perspektivet, utan tanke på större sammanhang eller långsiktiga mål. Men använt på det sättet är nyttig ett adjektiv som döljer en ideologisk vinkling, för det används ofta mot en bakgrund av underförstådda men oftast inte redovisade värderingar. Det vill säga, det förutsätter det som av någon tyst majoritet eller maktkonstellation uppfattas som användbart eller önskvärt. Nyttoinriktade synpunkter på utbildningens syfte handlar om att vetenskap och teknologi använder matematikens språk och att industri, handel och lönsamma företag och aktiviteter baserar sig på matematik, vetenskap, teknologi och informationsteknologi. Sådana synsätt kommer alltid till slutsatsen att matematik och matematikutbildning är det som driver skapandet av rikedom och industriella framgångar.

Alltså, ju mer matematik (samt vetenskap, teknologi och informationsteknologi) som utbildningen innehåller, desto mer välmående kommer samhället att bli. Och det finns naturligtvis ett löst samband, eftersom mer välmående samhällen tenderar att investera mer i sina utbildningssystem, och följaktligen får eleverna i dessa studera mer av allt, inklusive matematik, vetenskap och teknologi – ibland även förhållandevis mer av dessa ämnen.

Kopplingen är dock inte så enkel, vilket många forskare har visat (Ernest, 1998; Niss, 1994; Skovsmose, 1994). Dessutom finns det andra icke avsedda, för att uttrycka det välvilligt, resultat av en nyttoinriktad utbildning som betonar matematik, vetenskap, teknologi och informationsteknologi. Det är nämligen så, att beroende på sättet som dessa ämnen förmedlas, som snävt tekniska, så blir resultatet av en betoning av dessa ämnen att de lärande vänjer sig vid att stänga av, i verkligheten bortse från, värderingar och samhällsfrågor när det handlar om tekniska lösningar som bygger på matematik, vetenskap och teknologi. En sådan förmåga att hantera problem som rent tekniska, utan minsta tanke på dess mänskliga eller sociala följdverkningar är det normala när man bestämmer policy och fattar beslut inom affärsvärlden, och det blir också allt vanligare inom offentlig verksamhet och sjukvård.

Begreppet relevans kan användas som kontrast till begreppet nytta. Liksom nytta är relevans ett värdeladdat ord som betecknar vad en talare anser vara lämpligt. Ordet får därmed olika betydelser beroende på vem som använder det (Keitel, 1987). Relevans kan ses som en relation som har tre variabler: För det första en situation, en aktivitet eller ett objekt R (det som tillskrivs relevans), för det andra en person eller grupp P (som tillskriver R relevans) och för det tredje ett mål M (som här är ett uttryck för P:s värderingar). Objektet R sägs alltså vara relevant när P anser att det är det för att nå målet M. Skolmatematik (objektet R) anses av många politiker och utbildningsansvariga (gruppen P) vara ett relevant ämne med målet att öka befolkningens matematiska kompetens och teknologirelaterade yrkeskunskaper (vilket anses öka den ekonomiska tillväxten och den nationella välfärden). Det är typiskt, som i det här fallet, att när gruppen P hävdar att något objekt R är relevant menar man att det är universellt, det vill säga att P inkluderar alla förnuftiga varelser med gemensamma värderingar, inklusive uppnåendet av målet M.

En hel rad kursplaner, läroböcker och övningsböcker i matematik har och utgivits av författare som hävdar att de erbjuder ”relevant” matematik. Detta innebär att författarna delar uppfattning (med åtminstone någon grupp) om skolmatematikens mål och syften. Sådana mål kan vara att den lärande ska ha de matematiska kunskaper och färdigheter som av gruppen bedöms nödvändiga för följande utbildningsstadier, framtida arbete och för bedömning och betygssättning. Sådana mål kan också bland mer progressiva grupper handla om att förmedla en bredare kulturell förståelse av matematik och att främja positiva attityder till matematik. Dessa olika mål leder till olika uppfattningar om relevans i matematikutbildningen. Det finns dock en uppfattning om relevans som saknas i denna diskussion, kanske den viktigaste. Det handlar om elevernas egna uppfattningar om relevans i skolmatematiken.

Det finns inget skäl att anta att de lärande betraktar kursplaner i matematik som relevanta bara för att utbildningsansvariga och politiska ledare gör det, eftersom de själva mycket väl kan ha delvis andra mål. Detta är ett problematiskt perspektiv för en vetenskaplig diskussion, för den kräver empiriska belägg för elevers uppfattningar om matematik och dess relevans för deras personliga mål. De belägg jag sett för elevers uppfattning om matematikens relevans eller nytta speglar dessutom den förhärskande retoriken kring vikten av och den höga värderingen av matematik i samhället. Assessment of Performance

Unit (1985) rapporterade till exempel lärandes attityder till matematik, inklusive deras uppfattningar om dess nytta och relevans. Alla studenter i de stora urvalen tillskrev matematiken en hög grad av nytta och relevans, oberoende av sina egna prestationsnivåer och attityder. Dessa spände över hela spektrat av indikatorer från glädje och självförtroende till betydande nivåer av matematikängslan för en minoritet. Dessa resultat tyder på att det inte var personlig relevans i det egna livet man rapporterade om, utan den inlärda sociala värderingen av matematik som viktig och användbar.

I nästa avsnitt diskuterar jag en rad olika mål för matematiklärande. Några är tydligt nyttoinriktade, såsom allmännyttig kunskap, praktisk arbetsrelaterad kunskap. Några är klart relevanta för studenters val och specialiseringar, såsom avancerad specialistkunskap. Andra är relevanta för den lärande som person eller framtida medborgare: att värdesätta och uppskatta matematik, matematiskt självförtroende samt social styrka och säkerhet genom matematik. Om de sista målen uppnås kommer den lärande att vinna uppskattning, självförtroende och stärkas socialt, och förhoppningsvis se dessa vinster som personligt relevanta.

Vad innebär det att kunna matematik?

Mot denna bakgrund ska jag nu ta mig an den centrala frågan: ”Vad innebär det eller kan det innebära att kunna matematik?” Det kan innebära många olika saker. I tabell 1 särskiljer jag sex olika mål för undervisning och lärande av matematik och de förväntade resultaten i form av förmågor. Att uppnå dessa mål och utveckla de relaterade förmågorna ger några möjliga svar på frågan.

De sex målens ursprung finns i en analys jag gjorde av fem olika ideologiska grupperingar som utkämpade en strid om matematikkursplanen i Storbritannien under det sena 1980-talet och det tidiga 1990-talet (Ernest, 1991). Dessa fem gruppers sinsemellan motstridiga mål:

1. Att förvärva grundläggande matematiska färdigheter och god taluppfattning samt träning i social lydnad (auktoritär, inriktad på grundläggande färdigheter).
2. Att lära sig baskunskaper och kunna lösa praktiska problem med hjälp av matematik (industri- och arbetsrelaterad).
3. Att förstå och ha förmåga inom avancerad matematik, med någon form av uppskattning av matematik (inriktad på ren matematik).
4. Att nå självförtroende, kreativitet & uttrycksförmåga genom matematik (barninriktat progressiv).
5. Att stärka lärande som ger en matematiskt kompetent och kritisk medborgare (stärkande av socialt svaga och rättvisefrågor).

Efter att ha utvecklat detta slog det mig att om man tog bort de negativa konnotationerna inom några av målen och såg dem som komplementära i stället för konkurrerande blir resultatet en värdefull listning av mål för matematiklärande. Ett önskvärt resultat fanns dock inte representerat i listan, nämligen uppskattning av matematiken i sig som ett kulturellt element. Så jag lade till en sjätte rad och listade dem, se tabell 1.

Tabell 1. *Olika undervisnings- och lärandemål och förmågor*

Mål	Relaterade matematiska förmågor
1. Nyttoinriktad kunskap	Att kunna uppvisa användbara matematiska färdigheter och en taluppfattning som räcker för att klara enklare arbete och att fungera i samhället.
2. Praktisk arbetsrelaterad kunskap	Att kunna lösa praktiska problem med matematik, speciellt industri- och arbetsinriktade problem.
3. Avancerad specialistkunskap	Att ha förståelse för och förmågor i avancerad matematik, med specialistkunskap utöver gängse skolmatematik från avancerad gymnasiematematik till universitets- och forskarsnivå.
4. Uppskattning av matematik	Att uppskatta matematik som disciplin inklusive dess struktur, inriktningar, matematikens historia och matematikens roll i kultur och samhälle i stort.
5. Matematiskt självförtroende	Att känna trygghet i personliga matematikkunskaper, kunna se matematiska samband och lösa matematiska problem samt att kunna skaffa nya kunskaper och färdigheter när det krävs.
6. Social styrka genom matematik	Att bli stärkt som kritisk medborgare genom matematikkunskap och god taluppfattning samt förmåga att använda denna kunskap i sociala och politiska verksamhetsområden.

Dessa sex olika lärandemål och förmågor behöver inte utesluta varandra, de är inte heller nödvändigtvis önskvärda för alla elever. Det första målet, förvärvandet av funktionell nyttoinriktad kunskap, kan tyckas vara ett grundläggande minimikrav för alla som lämnar skolan (förutom de som har något hindrande handikapp). Att kunna uppvisa användbara matematiska färdigheter och en taluppfattning som räcker för att klara enklare anställning eller fungera i samhället är helt klart ett viktigt om än otillräckligt mål.

Hur nödvändigt ett sådant krav på resultat av skolans utbildning än är, är det långt ifrån tillräckligt. Aristoteles rekommenderade utbildning i musik och vetenskap (främst matematik) för barn, ”inte för att det är användbart eller nödvändigt, utan för att det är ”generöst och ädelt”. Han tillägger: ”Att överallt söka efter nytta passar inte alls för personer som är stora i anden och fria”. Jag återkommer till aspekter av matematikkunnande som är ädla och främjar andens storhet, liksom till sådana som främjar frisinne (liberality) och frihet. Jag kan i förbigående konstatera att det finns en aspekt av Aristoteles uttalande som jag inte ansluter mig till. På hans tid fanns det människor, slavar närmare bestämt, som inte var ”stora i anden och fria”. Men i våra moderna jämlika och demokratiska samhällen tror jag att alla kan eftersträva ”ädelt tillstånd och andens storhet”. Detta mål motsvarar kanske den europeiska *Bildung*-traditionen, utbildning och utveckling av en individ i en helhet som innefattar både intellekt och själ.

Den andra sortens förmåga är att kunna lösa praktiska problem med matematikens hjälp, särskilt industri- eller arbetsrelaterade problem. Detta är inte nödvändigt för alla människor, för problemens djup och art kommer att variera med olika anställningar. Dessutom har de flesta yrken som kräver specialiserad problemlösning med matematik också en specialiserad utbildning för detta.

Man skulle kunna argumentera starkt för att skolan ska ge den grundläggande förståelse som ytterligare specialistkunskap kan bygga vidare på. Detta handlar dock inte bara om att behärska ett innehåll eller ens de underliggande begreppen. Det finns också frågor om attityder till matematiklärande, inklusive det egna jaget som en trygg lärande, liksom uppskattningen av matematikens roll i de sociala funktioner och system som vardagslivet grundar sig på. På så sätt kan denna förmåga samverka med andra som diskuteras nedan.

Den tredje, specialistkunskap och färdigheter i avancerad matematik utöver den vanliga skolmatematiken är något som, enligt min uppfattning, inte är ett nödvändigt mål för alla vuxna. Det är önskvärt och behövligt för en minoritet av studenter för fortsatta studier i matematik eller matematikberoende högre studier. Utöver denna minoritet skulle jag vilja påstå att det är bättre för övriga att värdesätta och uppskatta matematik och ha självförtroende snarare än specifik avancerad matematisk kunskap. Detta är inte ett elitistiskt synsätt, för ingen behöver känna sig utesluten från fortsatta och avancerade matematikstudier. De kan komma tillbaka. Alla önskar dock inte fortsätta med matematik till avancerade nivåer, och jag tycker inte att det ska vara obligatoriskt.

De ovanstående tre kategorierna utgör dimensioner av användbar eller nödvändig matematik, för alla eller för vissa, främst för arbetets eller samhällets skull, ur ett ekonomiskt perspektiv.

Följande tre kategorier bidrar inte lika direkt till samhällsnytta. I stället menar jag att de har mer att göra med personlig, kulturell och social relevans, även om de på sikt medför vissa fördelar i användning. De är också mindre diskuterade eller prioriterade dimensioner av matematikkunnande i litteraturen, i synnerhet politikers och kursplaneförfattares officiella litteratur.

För det fjärde har vi att värdesätta och uppskatta matematik, både som disciplin och särskilt kunskapsområde, inklusive dess struktur och inriktningar och som ett centralt element i människans historia, kultur och samhälle. De flesta matematiklärare på alla nivåer behandlar det som ett rent tekniskt ämne, med en komplex uppsättning abstrakta verktyg snarare än som en del av kulturen. De som är intresserade av matematiken som helhet inser hur rik denna värdegrund kan vara och hur det faktiskt gör matematiken mer tillämpbar genom att se dess samband med alla andra kunskapsområden och aktiviteter. Att värdesätta matematik på detta sätt leder också till en uppskattning av de olika disciplinernas inbördes samband i all mänsklig kunskap. Jag kommer att gå närmare in på matematikens värdegrund och vad det kan betyda.

För det femte, den mest direkt personliga dimensionen som behandlas här rör matematiskt självförtroende. Det handlar om tilltron till sina egna matematikkunskaper, att vara fri från negativa attityder till matematik och att därför kunna söka efter och se matematiska samband och lösa matematiska problem och vara trygg i sin förmåga att skaffa nya kunskaper och färdigheter när det krävs för någon uppgift eller aktivitet. Detta är inte en del av matematiken som den lärande behöver ”kunna”. Det är ett personligt sätt att förhålla sig till sådant kunnande som ger människor styrka och förmåga att erövra och utöka sin kunskap och att ha nöje av processen.

Matematik är vida känt som ett ämne som det är svårt att lyckas i. Det finns visserligen en del inneboende svårigheter i matematik (dess många abstraktionsnivåer, avsaknaden av samband mellan matematiska procedurer och begrepp), men dessa svårigheter förvärras av en hel mängd negativa och falska konnotationer som resulterar i att den lärandes självförtroende blir lidande. Dessa konnotationer inbegriper filosofiska aspekter, såsom absolutistiska synpunkter på matematik och matematisk sanning, genderkonnotationer (matematik är ett maskulint ämne), hierarkiska och sociala aspekter (matematik har gjorts tävlingsinriktat och används som socialt filter) och så vidare.

Även om de oftast försummas i kursplanearbete (utöver en läpparnas bekännelse), men ändå är av stor betydelse, är attityder väl undersökta i litteraturen, och jag ska inte ytterligare utforska dem här. Jag ska dock säga det uppenbara, nämligen att positiva attityder inte kan undervisas direkt. De är indirekta produkter av många faktorer, inklusive personliga, familjerelaterade, sociala och kulturella faktorer. Ett av de viktigaste bidragen till attitydskapandet är sättet och stilen som matematiken undervisas på, i hur hög grad elevernas intresse fångas i klassrummet och hur känslomässigt tryggt eleverna upplever klassrummet som lärandemiljö. Att ta itu med dessa sätt att skapa attityder minimerar också de hinder som matematikens inbyggda svårigheter erbjuder de lärande.

Självförtroende och positiva attityder till matematik har en stärkande inverkan på den lärande och andra. Den sjätte aspekten av kunskap och förmåga handlar om att stärkas socialt. Detta är en annan form av styrka som också är beroende av en persons självförtroende. Det innebär att bli stärkt genom tillgång till matematiskt kunnande och vara en matematiskt kompetent, kritisk samhällsmedborgare som kan använda denna kunskap i personliga, sociala och politiska verksamheter, för att förbättra både det egna jaget och det demokratiska samhället. Jag och andra har undersökt detta i andra sammanhang (Ernest, 2001; Frankenstein, 1983; Skovsmose, 1994) och det kommer att förekomma i fortsättningen som en dimension av en bred föreställning om att värdesätta matematik.

Att värdesätta matematik

Den första fråga som behöver besvaras är följande: ”Vad betyder eller vad kan det betyda att värdesätta matematik?” Det finns en användbar analogi mellan matematisk förmåga och värdesättande av matematik å ena sidan och studier av språk och litteratur å andra sidan. Matematisk förmåga är som att kunna använda språket effektivt för att kommunicera muntligt och skriftligt. Att värdesätta matematik liknar studiet av litteratur såtillvida att det handlar om matematikens kulturella och historiska betydelse och att matematikens kulturella redskap förstås i den kontexten, precis som stora och viktiga texter inom litteraturen. Enligt min uppfattning bör en preliminär analys av vad värdesättandet av matematik i bred mening innebär, beröra följande aspekter av matematisk medvetenhet: Liv och arbete, kultur, kritiskt medborgarskap som disciplin, historia och filosofi samt några av dess stora idéer.

Liv och arbete

Den första aspekten av att värdesätta matematik är att bli medveten om hur och i vilken utsträckning matematiskt tänkande genomsyrar vardagslivet, livet på fabriksgolvet och dagspolitiken. Detta är inte bara nyttoinriktad matematikkunskap utan ger också en insikt i hur viktig matematiken är inom handel och ekonomi (t ex aktiemarknaden), telekommunikation, informations- och kommunikationsteknologi och så vidare, samt något av den roll den spelar för att framställa, koda och visa information så som den används i hela samhället. Det innefattar också en medvetenhet om hur matematiken ständigt blir alltmer väsentlig för, men också djupare och mer osynligt invävd i, alla aspekter av vårt vardagsliv och våra erfarenheter. Om vi inte har en känsla för detta kan vi inte behärska våra liv och våra vardagsaktiviteter.

Kultur

Att ha känsla för matematik, som centralt element i kulturen, konsten och livet, nu och i det förflutna, som genomsyrar och understödjer vetenskap, teknologi och alla aspekter av mänsklig kultur, är en central del i att värdesätta matematik. Det kan vara allt från att tillämpa matematiska begrepp som symmetri till att förstå element i konst och religiös symbolik eller hur modern fysik och kosmologi är beroende av algebraiska ekvationer som Schrödingers vågekvation eller Einsteins $E=mc^2$. En mängd ytterligare exempel skulle kunna anföras här, och den lärande har rätt att känna till dem som en del av sitt kulturella arv.

Kritiskt medborgarskap

Värdesättande inbegriper att ha en kritisk förståelse av hur matematik används i samhället; att identifiera, tolka, värdera och kritisera den matematik som är inbäddad i sociala, kommersiella och politiska system och påståenden, allt från annonser från den finansiella sektorn till regeringens eller olika intressegruppers uttalanden. Matematik används flitigt för att formulera och underbygga påståenden, och användning ger en auktoritet åt annonser, rapporter och uttalanden. Varje medborgare i det moderna samhället behöver kunna analysera, ifrågasätta, kritisera och förstå den begränsade giltigheten i användningen och vid behov kunna avvisa falska eller missvisande påståenden. Detta är nödvändigt både för att försvara medborgarnas egna rättigheter och intressen och för att skydda de svagaste i samhället som inte förmår detta själva. Ytterst är en sådan förmåga ett livsviktigt bålverk till skydd för demokratin och det humanistiska och civiliserade samhällets grundläggande värden. Se t ex (Ernest, 2001; Frankenstein, 1983; Skovsmose, 1994).

Som disciplin

Att kunna förstå matematikens huvudinriktningar och begrepp och att ha en känsla för deras samband, inbördes beroende och matematikens helhet är ett annat nyckelelement i att värdesätta matematik. Eftersom i stort sett alla i den utvecklade världen ägnar många år åt att studera matematik borde de mot slutet av sina studier ha någon föreställning, om än begränsad, av matematik som disciplin. Matematik är en central beståndsdel i kulturen och fler människor skulle behöva inse att matematik handlar om mer än tal och det som undervisas i skolan.

Historia

Att vara medveten om matematikens utveckling, de sociala kontexter där matematiska begrepp har sitt ursprung, dess symbolism, teorier och problem är viktigt i sig, lika väl som för att stärka studier av matematik. Matematikens utveckling är oskiljbar från de viktigaste historiska utvecklingarna, från de gamla samhällena i Mesopotamien, Egypten och Grekland (tal och beskattning och bokföring, geometri och lantmäteri) via medeltidens Europa och Mellanöstern (algoritmer och handel, trigonometri och navigation, mekanik och ballistik) till den moderna eran (statistik och jordbruk, biologi, medicin, försäkring, logik och digitalteknik, media, telekommunikation).

Filosofi

Att förstå de sätt varpå matematisk kunskap etableras och säkerställs genom bevis, men också att det finns åtskilliga synsätt på matematikens natur och kontroverser kring filosofiska grunder för kunskapen är en annan del av värdesättandet av matematik. Att argumentera och övertyga används mer än någonsin, och en viss förståelse för logik, bevis och tillhörande felslut, liksom styrka och begränsningar inom matematiken är nödvändig för en medborgare i det moderna samhället. Dessutom är den matematiska kunskapens natur och grundvalar avgörande för förståelse av epistemologi och hävdandet av kunskap i allmänhet. Att vara medveten om kontroverser kring matematikens grunder stödjer en mer kritisk attityd till den samhälleliga användningen av matematik och förkastandet av det godtrogna sätt som innebär att allt matematiskt tillskrivs visshet.

Matematikens stora idéer

Slutligen krävs för att värdesätta matematik en kvalitativ förståelse av några av matematikens stora idéer såsom oändlighet, symmetri, struktur, rekursion, bevis, kaos, slump osv. Detta är en förståelse av matematiken som ett ädelt, estetiskt ämne som, med Aristoteles ord, ”talar till själen”. Det innehåller några av människans djupaste och mest abstrakta spekulationer inklusive underbara kristallklara världar av förnuft och fantasi med idéer som kaos, oändligheter, paradoxer, logik och begrepp som rymd, bevis, harmoni, symmetri, mönster och struktur i dess renaste former. Matematiken är en skattkammare som innehåller många av de djupaste, mest spännande och kraftfulla idéer som uppfunnits av mänskligheten, och att få tillgång till dessa gör inte endast att människans tänkande och föreställningsförmåga vidgas, utan erbjuder också den vetenskapliga motsvarigheten till poesi och ger upplyftande och uppbyggliga erfarenheter som kan mäta sig med religiösa sådana, men oberoende av tro.

I korthet innebär att värdesätta matematik en mycket bred förståelse för och medvetenhet om dess natur och värde inom hela den mänskliga kulturen liksom insikt i och förmåga att kritisera dess samhälleliga användning. Först då kan man säga att människor har fått det som är deras rätt, matematikens rika kulturarv. En sådan uppskattning av matematiken underlättar självständigt tänkande som beaktar frågornas större sammanhang och implikationer likaväl som mer detaljerade överväganden för att göra balanserade bedömningar.

Är sådana inslag av att värdesätta matematik möjliga för skolan? Man ska inte ha förutfattade meningar om vad som är lämpligt eller begripligt för skolbarn. Ett av argumenten mot att uppmuntra till värdesättande av de stora idéerna som t ex oändligheten är att det är för svårt för skolbarn. Många intresserade 8- eller 10-åringar kan dock gladeligen diskutera rymdens oändlighet eller att det inte finns något slut för de naturliga talen. Jag tror att det är vår föreställning om skolmatematik som begränsar de lärandes värdesättande, inte deras förmågor. Mitt förslag innebär att vi förändrar våra föreställningar om matematikens roll i den obligatoriska skolan för att uppnå något i stil med *Bildung*, som en hjälp att utveckla eleven som hel människa, med alla sina förmågor och möjligheter utvecklade som en helhet, snarare än utbildning som någonting nyttigt.

Jag har hävdat att matematikkunnande i djupaste mening innebär utvecklandet av en uppskattning av matematik så som jag skisserat här ovan. Det jag har skrivit speglar min kärlek till matematiken. Men trots den kärlek till matematik som de flesta matematiklärare, utbildare och matematiker känner verkar man inte för främjandet av ett värdesättande av matematik som ett mål för matematikundervisningen. Man kan därför påstå att många professionella matematiker både undervärderar sitt ämne och underskattar elevernas förmåga att uppskatta det. Matematik är nyttigt, och mer än så, underbart. Men den behöver också göras relevant för elevernas egna liv och strävanden så att de kan dela denna syn. Detta kan delvis göras genom att entusiastiska lärare och spännande resurser främjar inslag av värdesättande. Men det måste också göras genom att engagera eleverna i matematikprojekt som anknyter till deras personliga erfarenheter, liv, intressen, fritidsaktiviteter och strävanden. Om man utgår från min analys av begreppet relevans är det omöjligt att framtvinga känslor av relevans, det är en oxymoron. För att elever ska se relevans i sina matematiska aktiviteter krävs en öppen pedagogik som har känsla för deras uttalade intressen och önskemål. Därutöver måste den ge utrymme för och respektera deras röster, attityder, funderingar och även avvikande åsikter. En verkligt relevant matematikkursplan (dvs som eleverna uppfattar som relevant för deras intressen och mål) kräver att man förhandlar sig fram till en balans mellan vad matematikutbildare ser som värdefullt, vad staten kräver för betygsättning i matematik och sist men inte minst, elevernas egna intressen, mål och val.

Aktiviteter

Följande aktiviteter är ett urval som visar hur en aktuel händelse, ovanligare innehåll (religion och handel) och elevers egna intressen och erfarenheter (projektarbete) kan införas i klassrummet för lite äldre elever. Syftet är att föreslå att läraren ska skapa egna aktiviteter för utveckling av uppskattning av matematiken som ett komplement till skolans standarduppgifter. Uppgifterna ska bara tjäna som illustration, och syftet är att de ska utvecklas, förändras, utvidgas och kompletteras som resultat av elevernas och lärarnas egna intressen och idéer.

USA:s kostnader för Irak-kriget

USA:s kostnad för kriget i Irak 2003 uppskattades 15:21 tisdagen den 9 maj 2006 till $279,438,097,204 (från www.costofwar.com/). Undersök på webbplatsen hur höga kostnaderna är i detta ögonblick.

> Every gun that is made, every warship launched, every rocket fired, signifies in the final sense a theft from those who hunger and are not fed, those who are cold and are not clothed.
>
> (Dwight D Eisenhower, 16 april 1953)

Krig påverkar alla, inte bara dem som är direkt inblandade i striderna. Denna webbsida är ett enkelt försök att visa en av de mer kvantifierbara effekterna av kriget, den finansiella börda det lägger på de amerikanska skattebetalarna. Hur kom författarna fram till dessa tal/summor? Förklara. Varför stiger de så snabbt? Vad kunde man annars ha spenderat pengarna på? Här är 6 möjliga områden. Underlag finns på webbsidan.

1 Hur stor är kostnaden per barn i förskoleprogrammet Head Start?

2 Hur stor är kostnaden per barn och år i programmet Children's Health Care?

3 Hur stor är kostnaden per enhet i programmet Affordable Housing?

4 Hur stor är kostnaden per år för en extra lärare?

5 Hur stor är kostnaden för ett fyraårigt College-stipendium?

6 Hur stor är kostnaden för att ställa om en bil till naturgasdrift?

- Hur skulle en förnuftig fördelning av utgifter inom dessa 6 olika områden se ut? Motivera! Skulle du behöva alla pengarna?
- Vad kan USA tjäna på kriget? Vad kan man få igen på utgifterna ovan? (Ta med i beräkningen intäkter relaterade till olja, ombyggnader och ny handel. Gör de bästa skattningar du kan och motivera dem).
- Om kriget var billigare, skulle det rättfärdiga det?
- Om USA kunde göra en vinst på kriget under en period på t ex 10 år, skulle det rättfärdiga det?

Undersökningar och projekt

Låt eleverna i smågrupper välja egna ämnen att undersöka från följande lista, eller från egna projekt. De bör utveckla egna undersökningsmetoder, samla in fakta, göra utställningar (affischer, modeller osv) och presentera projektresultat för klassen. Uppmuntra dem att presentera sina resultat för skolan, på föräldramöten osv. Om deras projekt är av lokalt intresse kan man uppmana dem att presentera sina rön på lokalradio eller TV och att publicera resultaten i lokalpressen. Detta är en service gentemot samhället och visar också eleverna att deras skolprojekt värdesätts av världen utanför skolan, se t ex (Ernest, 1986; Mellin-Olsen, 1987).

Ämnesförslag

Miljö

- Lokal kartläggning av butiker, olika typer inklusive välgörenhetsbutiker och stängda butiker, förändringar över åren.
- Kartläggning av parker och lekplatser: typer, storlek, säkerhet.
- Kartläggning av hemlösa: lokal och nationell statistik.
- Analys av fakta från olycksdrabbade platser.
- Borde det finnas fler lekparker, skolor och butiker i nya bostadsområden? Är butiker, postkontor och brevlådor lämpligt placerade? Vad händer med lokala gator när nya bostadsområden byggs.
- Hur mycket kostar det att bygga ett hus i området? Hur mycket säljs det för?
- Miljöförstöring, skövling av regnskogen, lokala och nationella kostnader för återvinning – är det verkligen lönt att åka till återvinningsstationen?
- Hur mycket papper används i skolan, länet, landet? Hur mycket återvinns?
- Bensinförbrukning – hur stora föroreningar ger olika bilar? Vem orsakar mest förorening? Vem kör de mest förorenande bilarna? Vilka länder förorenar mest? Vilka länder drabbas värst?
- Diskutera och ifrågasätt kontroversiell statistik om miljön osv. Blir jorden varmare? Stiger havsnivåerna?

→

Hälsa och friskvård

– Gör en undersökning om bruk av och åsikter om
  i) rökning
  ii) alkohol
  iii) partydroger i klassen, i skolan, på gatan.
– Gör en analys av dödlighet och förväntad livslängd i samhällsklasser, länder, regioner, världen.
– Uppskatta sjukvårdens årliga kostnader för behandling av patienter som lider av sjukdomar relaterade till rökning.
– Ta reda på vinsterna för världens tre största tobaksbolag.
– Varför röker människor när man vet att rökning dödar?
– Hur stora vinster gör tobaksindustrin för varje person som dör av lungcancer orsakad av rökning?

Politiska fakta

– Diskutera det nationella röstnings- och valsystemet. Är det rättvist? Finns det bättre sätt? Är det möjligt att utveckla ett rättvist system? Pröva olika sätt att rösta.
– Analysera statistik när det gäller anställning, utbildning, psykisk hälsa, fängelser, med avseende på etniskt ursprung.
– Undersök sambandet mellan kön och studieframgångar. Är de rättvisa?
– Undersök könsstereotyper i annonser och tidningar.
– Gör en jämförelse nationellt och i andra länder av utgifterna för utbildning, hälsa, försvar, bistånd osv.
– Hur mäts inflation?
– Analysera arbetslöshetssiffrorna med hänsyn till region, utbildning, socialgrupp, kön.

Symboler

Undersök de stora världsreligionerna (t ex islam, kristendom, hinduism, judendom, taoism, buddhism osv) för att identifiera deras viktigaste symboler.

Samla dessa symboler.

Undersök symmetrin i symbolerna. Beskriv dem noggrant, med diagram.

Diskutera varför ni tror att man har valt symboler med sådana symmetrier. Vilka religiösa idéer kan sådana symmetrier uttrycka?

Samla några storföretags logotyper (t ex biltillverkares logotyper).

Hur skiljer de sig från eller hur liknar de religiösa symboler? Hur skiljer sig deras syften? Förklara.

Referenser

Assessment of Performance Unit (1985). *A review of monitoring in mathematics 1978 to 1982*. London: Department of Education and Science.

Ernest, P. (1986). Statistics and the media. *Mathematics in school*, *15* (3), 14 – 15.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, New York: State University of New York Press.

Ernest, P. (2001). Critical mathematics education. I P. Gates (Red), *Issues in mathematics teaching*, (s 277 – 293). London: Routledge/Falmer.

Frankenstein, M. (1983). Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's epistemology. *Journal of Education*, *165* (4), 315 – 339.

Keitel, C. (1987). A glance at SMP 11 – 16 from a distance. I A.G. Howson, (Red), *Challenges and responses in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics Education*. Dordrecht: Reidel.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. I R. Biehler, R.W. Scholz, R. Straesser &

B. Winkelmann, (Red), *The didactics of mathematics as a scientific discipline*, (s 367 – 378). Dordrecht: Kluwer.

Restivo, S. (1992). *Mathematics in society and history*. Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Att vara matematisk i klassrummet

STEPHEN LERMAN

Inledningsvis tar jag upp vad vi kan tänkas tala om, när vi ställer frågor om vad matematik är och vad elever bör kunna. Jag hävdar att vi borde arbeta med föreställningen att matematisk kompetens definieras och produceras i klassrumsinteraktioner. Vardagliga aktiviteter kan användas av lärare och läroböcker i matematiska syften och uttalat matematiska aktiviteter påträffas utanför skolan, initierade av föräldrar, andra vuxna eller syskon. Vi kan också diskutera naturliga mänskliga förmågor som kan utvecklas till matematiska kompetenser, men det som räknas som att utöva och nå framgång i matematik beror på vad som värdesätts i skolan och olika föreställningar om vad som är viktigt, styr produktionen av olika slags matematiskt tänkande (Boaler, 1997). Jag kommer att se på processen att bli matematisk i klassrummet genom att diskutera vad vi skulle kunna betrakta som en analysenhet när perspektivet är sociologiskt eller sociokulturellt. Slutligen kommer jag att ge några kommentarer om matematikundervisning mot bakgrund av de första avsnitten.

Vad handlar diskussionen om?

Jag har valt att engagera mig i frågorna: *Vad innebär det att kunna matematik, och vilken matematik är värd att kunna?* Dessa tycks inbjuda till eftertanke om vad matematik är, vad en matematiker gör, dvs att blottlägga själva essensen i matematikkunnande. Frågorna är kunskapsteoretiska, och kan kanske besvaras genom praktiserande matematikers introspektion (David & Hersh, 1981; Hadamard 1945; Polya, 1957) eller genom systematisk översikt (Burton, 2004) och det finns några välkända och viktiga texter om matematiskt tänkande baserade på en sådan ansats, t ex Mason, Burton & Stacey (1982). De kunskapsteoretiska frågorna följs sedan av ett spörsmål som är av mer moralisk natur, nämligen en bedömning av hur meningsfulla vissa delar av denna essens verkligen är.

Burton (2001) beskriver att de matematiker som tillfrågas om sin verksamhet har en rad olika föreställningar om den. En förhoppning om ett enhetligt synsätt kommer alltså inte att infrias. Det är knappast förvånande att vi finner denna mångfald. I dessa postmoderna tider kan vi anta att kunskapsfält expanderar, bygger på varandra och sig själva och tjänar en mångfald syften. Matematiker försvarar sitt territorium från attacker i form av krympande resurser och förändrad status inom universiteten. Akademiker slåss om studenter, om anslag och publicering – samtidigt som de undervisar fler studenter med större spännvidd i förkunskaper.

I senare arbeten har jag utgått från antagandet att skolmatematik är annorlunda, om än relaterad till matematik så som den utövas av matematiker. En av många saker vi lärt oss av postmodern teoribildning är att fråga oss vem som drar fördel av en viss diskurs eller var makten befinner sig i förhållande till den kunskap som bärs upp av diskursen. Att söka efter andemeningen i vad det innebär att kunna matematik kan tjäna konservativa tänkares intressen. De kan finna sådana debatter fruktbara i sina försök att (åter)erövra kontrollen av det okontrollerbara, i detta fall matematiklärandet. Belägg för detta kan vi kanske se i matematikkonflikter som den i Kalifornien. Många ansluter sig till de tolkningar av matematiskt tänkande som till exempel Mason m fl gör (1982). Men detta synsätt kan ifrågasättas av andra matematiker som argumenterar för att fokus på algebraisk kompetens utgör essensen av det som krävs av skolmatematiken. Trots allt genomgick dagens matematiker (och matematikutbildare) själva just en sådan matematisk utbildning. När vi tar itu med dessa frågor föreslår jag emellertid att vi överger sökandet efter essensen och i stället beaktar den sociologiska frågan ”Vad innebär det att kunna *skol*matematik?” Denna förändring gör inte målet mer enhetligt. I olika länder i världen och även inom länderna själva ser skolmatematik olika ut. Traditionell matematik, reformerad matematik, färdighetsträning, drill, problemlösning, elevcentrering, autentisk matematik, etnomatematik och kritisk matematik är endast några få av de olika former för matematikutbildning vi kan finna.

Vi kan utgå från att olika versioner av ”traditionell” undervisning är vanligast världen över, även om många länder försöker implementera någon typ av reformprogram. Undervisning kan drivas av konstruktivistiska idéer om hur barn lär, kanske influerade av lärares roll i ”scaffolding” (Bruners tidiga version av Vygotskys närmaste utvecklingszon). I denna artikel kommer jag in på teorier och deras användning i forskning men fördjupar mig inte i dessa. Intresserade hänvisas till Lerman (2000; 2001a).

Det intellektuella fältet förskjuts från kunskapsteori till sociologi och därmed öppnas möjligheten till olika slags systematiska och empiriska studier. Att grunda sig på sociologisk teori innebär stora vinster. Det motsäger inte betydelsen av kunskapsteoretiska matematikstudier som ger ett viktigt stöd i en rad aspekter av undervisning och lärande i matematik. En nyckelfråga för samhället är varför elever ur samma socialgrupp, de från lägre socioekonomiskt skikt, misslyckas i skolmatematik oavsett vilken pedagogik som tillämpas. Hur kan det vara så? Hur kan man förklara detta? Sociologin kan erbjuda klarlägganden som varken matematiken eller psykologin kan. De två senare diskurserna kan enbart tala om elevers misslyckande eller brister. Psykologi är studiet av normalt uppträdande och normal utveckling, därför blir den som inte ”passar in” oundvikligen avvikande eller otillräcklig. Jag återkommer till frågan om sociologi och psykologi som förklaringsdiskurser.

Det är många intressen inblandade i striden om vad som bör utgöra skolmatematik. I Storbritannien är några av de minst inflytelserika aktörerna på det ”inofficiella fältet” (Bernstein, 2000), lärare och forskare i matematikdidaktik. Detta är inte fallet i USA eller i en del andra länder. Nyckelfrågan är vad vi som samfund väljer att undervisa om, när våra relationer till myndigheterna är sådana att vi inte ens blir tillfrågade eller har något att säga till om. Det är alltid fråga om val av det som vi uppfattar som väsentlig matematik, eller val av den som bestämmer. Valen är alltid förknippade med värderingar om vad utbildning handlar om, till vad och vems syften den tjänar, och i synnerhet vad matematikutbildning ska handla om, etnomatematik, baskunnande, traditionellt innehåll eller vad det nu må vara. Detta är politiska strider som beskrivs utmärkt av Michael Apple (1995), Stephen Ball (2002) med flera. Åtgärden att införa mål, nationella prov, internationella jämförelser, inspektioner av skolor, kompetensutveckling av lärare osv handlar om att regeringar vill visa att de kan genomföra förändringar. De sätter mål för ”förändring” och visar att de har uppnått dessa mål. Det är inte nödvändigtvis ett uttryck för partiers värderingar utan handlar mer om att bli omvald. Man kan se på Bushs slogan ”No child left behind” som ett försök att styra skolorna, men också som ett slagord som gör en president populär. Det är trots allt inga lärare som vill att något barn ska komma efter.

Mycket viktigare är emellertid att dessa strider spelar roll för unga människors framtida liv och därmed för samhället som helhet. Frågor kring varför någon lyckas eller misslyckas i en speciell version av skolmatematik och vilka som gör det är centrala forskningsfrågor för oss inom matematikdidaktik. När samma socialgrupper misslyckas gång på gång, eller snarare blir svikna av skolsystemet, resulterar det i en arg och frustrerad underklass. Tidigare har flickors sämre prestationer varit föremål för omfattande studier. Numera lyckas flickor bättre än pojkar i alla ämnen upp till 16 års ålder i Storbritannien, Australien och flera andra länder. Populistisk retorik i många länder vill se studier av pojkars sämre prestationer. Mer nyanserad och lyhörd forskning, se t ex Zevenbergen (2000), visar på samspelet mellan genus, klass och etnicitet och ger en mer komplex bild av elevers prestationer.

När vi ser på det som produceras i klassrummet som adekvat matematiskt tänkande, på vem som lyckas och vem som misslyckas och på förklarande strukturer för dessa fenomen hellre än att söka efter *essens* i matematiskt tänkande, lägger vi ansvaret på politik, skolsystem, läroboksförfattare och på oss själva som lärare och inte på elevers kognitiva misslyckanden. Om vi ser varje ”reform” som val baserat på värderingar snarare än uttryck för vad matematik *verkligen* är, kan vi kanske välkomna analyser av vem som misslyckas, t ex Lubienski (2001). Då kan vi också försöka analysera varför.

De senaste fem åren har jag satt mig in i och arbetat med Basil Bernsteins teorier (Bernstein, 2000). Jag har funnit dem särskilt kraftfulla då de för samman teorier om pedagogiska förändringar på makronivå (t ex vad som orsakade utvecklingen från traditionella till liberalt-progressiva former av pedagogik) med teorier på mikronivå om vad som händer i klassrummet och varför dessa förändringar kan påverka olika socialgrupper på olika sätt. Vi genomförde till exempel en upprepning av Candia Morgans (1998) studie av hur lärare bedömer elevers arbete i matematik (Morgan, Tsatsaroni & Lerman, 2002). Morgans studie grupperade lärarnas förhållningssätt i åtta kategorier

– examinator som använder externt beslutade kriterier,
– examinator som ställer upp och använder egna kriterier,
– lärare som söker möjligheter att ge eleven poäng,
– lärare som föreslår sätt att möta kriterierna,
– lärare som föreslår hur elever kan förbättra den matematiska färdighetsnivå de uppvisat,
– inbillat naiv läsare,
– intresserad matematiker,
– intervjuobjekt.

Genom att utgå från och utveckla Bernsteins teorier har vi kunnat omklassificera dessa till fyra förhållningssätt, baserade på om lärare var elevorienterade eller läroboksorienterade och om de utgick från officiella eller inofficiella diskurser. Denna systematiska och teoribaserade analys möjliggjorde många observationer som vi inte kunnat göra som resultat av den tidigare empiriska klassifikationen, inklusive följande:

> ... den ansats vi har skapat möjliggör en dialog mellan de teoretiska och empiriska forskningsområdena, och gör att vi kan förstå lärares relationer till de diskurser som är involverade i bedömningen. Förutom vid utvärdering kan vår teoretiska struktur användas för att beakta sociala krafter när vi studerar undervisning och lärare samt skillnader mellan lärare.
>
> (s 459)

Vidare,

> Bernsteins struktur möjliggör ett mer utvecklat språk för att beskriva de mekanismer genom vilka sociala krafter påverkar skolning. Utan ett sådant språk förblir kopplingarna till socialgruppernas ideologier dolda vilket förhindrar möjligheter till motstånd.
>
> (s 459)

Modellen utvecklas för närvarande för att kunna tillämpas i en studie med titeln "The production of theories of teaching and learning mathematics and their recontextualisation in teacher education and education research training", se (Lerman, Xu & Tsatsaroni, 2003; Tsatsaroni, Lerman & Xu, 2003).

Hittills har jag förändrat frågan från "vad innebär det att kunna matematik?" till "vad innebär det att kunna skolmatematik?", en fråga som bättre möjliggör funderingar kring elevers framgång. Jag har identifierat att bedömningar och val som görs då man väljer vad skolor ska undervisa om alltid är värdeladdade. Med blicken in i klassrummen, för att finna sätt att behandla vad det innebär att kunna skolmatematik, går jag vidare till nästa avdelning.

Att bli matematisk – en analysenhet

De senaste 15 åren har vi fått en förskjutning så att vi nu uppfattar lärande som något som handlar om ett lärlingsskap eller en kulturell fostran in i ett samhälles praktik snarare än en dekontextualiserad, kognitiv utveckling. Detta har stärkt vårt tänkande som forskare (Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998). Forskaren betraktar nu naturen hos *communities of practice*[1] som vi finner den i skolor och är söker inte efter en "normal kognitiv utveckling". Det beror på elevernas identiteter om de blir eller inte blir delaktiga i dessa grupper. Ett problem uppstår i all forskning: Vad är det vi studerar? När vi genomför kognitiva studier ser vi på bedömning av om eleverna tillägnat sig eller konstruerat en förståelse av ett speciellt matematiskt innehåll. Vi kan använda oss av test eller undervisningsexperiment för att bedöma förståelse eller brist på förståelse. Vi kan karakterisera vår forskning som ett sökande efter förståelsen av ett begrepp som en *analysenhet*. När vi ändrar fokus för att studera identitetsutveckling i sociala sammanhang, vad är det då vi faktiskt ser på, och hur ska vi identifiera utveckling och lärande? Med andra ord, när vi arbetar inom en sociokulturell teori, vilken analysenhet kan vi använda?

Jag blev uppmärksam på frågan om en passande analysenhet genom Vygotskys krav på att föra samman affekt och kognition samt identifiering av en analysenhet för detta. I allmänhet begränsas forskning av vad man väljer att betrakta och, naturligtvis, vad man väljer att inte betrakta. Om man vill arbeta utifrån ett sociokulturellt perspektiv är valet av undersökningsobjekt och analysenhet helt avgörande. I Lerman (2001a) skrev jag följande när jag försökte utarbeta en analysenhet som inbegriper sociokulturella teorier:

> Titeln på Vygotskys bok *Mind in Society* fångar denna enhet, och den formuleras också av Lave och kolleger som "person-in-practise" samt av Wertsch som "person-acting with mediational means" (Wertsch 1991, s 12). Vi skulle kunna utvidga denna enhet ytterligare genom att ta hänsyn till diskussionen om de reglerande dragen i sociala diskursiva

[1] *Community of practice* är en beteckning som används för en grupp människor med liknande mål och intressen. De arbetar tillsammans med samma verktyg och uttrycker sig på samma sätt och de utvecklar likartade värderingar.

> verksamheter. När en person stiger in i en ny verksamhet (i sociala situationer, i skolan, på arbetsplatsen osv) börjar denna verksamhets reglerande effekt verka och positionerar personen i verksamheten. Mål och behov modifieras av en önskan att vara delaktig/inte vara delaktig eller någon av de många andra möjliga positionerna. Även om en person drar sig ur en verksamhet efter kort tid har han eller hon förändrats genom delaktigheten. Vi kan därför tala om ”practice-in-person” för att fånga deltagandets reglerande effekter. Genom att kombinera de två kan vi tala om analysenheten ”person-in-practice-in-person” eller ”mind-in-society-in-mind” (Slominsky, 1999). (s 98)

I min artikel försökte jag skissera en uppsättning forskningsverktyg för att arbeta med analysenheten ”person-in-practice-in-person”. Jag provade också att föra samman analyser av detaljer i klassrummet på mikronivå samt sociala krafter på utbildning på makronivå genom metaforen ”zoom-lins”. På ett annat ställe skrev jag:

> I want to suggest, though, that psychology can be seen as a moment in socio-cultural studies, as a particular focusing of a lens, as a gaze which is as much aware of what is not being looked at, as of what is. This is an adaptation of Rogoff's planes of analysis, into a dynamic metaphor in which one might envisage a researcher choosing what to focus on in research through zooming in and out in a classroom, as with a video or still camera, and selecting a place to stop... A discursive, cultural psychology locates its interpretation of the individual at the intersection of overlapping language games in which the person has developed and thus is necessarily rooted in the study of cultures and histories. Draw back in the zoom, and the researcher looks at education in a particular society, at whole schools, or whole classrooms; zoom back in and one focuses on some children, or some interactions. The point is that research must find a way to take account of the other elements that come into focus throughout the zoom, wherever one chooses to stop.
>
> (Lerman, 2001b, s 4)

Att välja den utvidgade analysenheten betyder att studiet av identitet blir ett komplement till den sociologiska analys som jag beskrev i det första avsnittet. Bernsteins perspektiv tillhandahåller inte ett språk för att studera individuella banor eller de olika verksamheter som pågår i klassrummet. Lave och Wengers perspektiv tar inte hänsyn till hur sociala verksamheter regleras. De gör en uppdelning i undervisning och lärande. Bernstein sammanför dessa i en ny form genom sin fokusering på pedagogiska former och deras effekter på elevernas (och lärarnas) identiteter genom begreppen klassifikation och inramning samt makt och kontroll. Lave och Wenger beskriver den problematiska roll som lärare spelar i klassrummet. De kontrasterar den på ett informativt sätt med den effektiva roll som en ”mästare” har i en lärlingssituation men distinktionen tar inte tillräcklig hänsyn till skolors och klassrums särskilda natur och funktion i samhället. Barn väljer inte att gå i skolan så som man skulle kunna välja att lära sig ett yrke. Dessutom kan vi i många situationer tala om lärare som delaktiga i *communities of practice* (Graven, 2002) vilket ger upphov till en helt ny uppsättning frågor för teorier om situerat lärande (situationsbundet lärande) som tonar ned undervisningens funktion i lärandet. Detta är helt i sin ordning på en arbetsplats eller i lärlingslärande, men i skolan är lärarens hela jobb att undervisa.

Så, genom att omdefiniera ”att lära sig matematik” till ”att bli matematisk i klassrummet” har jag visat att vi kan utveckla sätt för forskare och lärare att se på vad som händer i klassrummet för att producera lyckade skolmatematiker, men vi kan därigenom också se på hur klassrummen producerar misslyckanden, dvs personer som inte blir matematiska. Med Lave och Wengers språkbruk kan vi undersöka de former av deltagande eleverna går in i, deltagande med motstånd, perifert deltagande eller andra former. Det måste dock framhållas att Bernsteins analysverktyg är mycket mer precisa och kan operationaliseras mycket effektivare i nutida matematikdidaktisk forskning än de verktyg som teorier om situerat lärande tillhandahåller. ”Identitet” är ett begrepp som är svårt att utforska, och att hitta en lämplig analysenhet är avgörande. Billet (2003) föreslår en användbar modell, en tredelad analys: den sociokulturella, den situationsbundna och den ontogenetiska. Den sociokulturella analysen bär på verksamhetens historia medan den situationsbundna analysen bär på verksamhetens kontextspecifika reglerande aspekter på lokal nivå. Dessa konstituerar tillsammans *sociogenetic*. Den ontogenetiska analysen förmedlar individernas personliga historier, även om dessa också har sociala rötter. Det kognitiva tolkas som det som utmynnar i aktörens mål, handlingar och procedurer.

> Därför utgör betraktandet av målinriktade aktiviteter inom en kulturell verksamhet en bas, utifrån vilken man kan förstå relationerna mellan sociogenetiska källor och ontogeneser (dvs relationerna mellan social och kognitiv erfarenhet) genom en undersökning av de inter-psykologiska processer som innefattar gestaltandet av dessa aktiviteter.
>
> (Billet, 2003, s 139)

Billets studie gäller ett yrkesområde, frisörer, och han undersöker en rad frisersalonger i Australien och i andra länder för att identifiera

a vad som är gemensamt för de olika salongerna och i yrkesutövning, det sociokulturella,

b vad som är unikt för en speciell salong, det situationsbundna, och

c vad som är karakteristiskt för en enskild frisör, det ontogenetiska.

Han utvecklar kriterier för att bestämma särskilda handlingar eller yttranden. Detta är exempel på ett försök att göra utforskning av identitet mer strukturerad och rigorös och därför mer fruktbar för att utveckla undervisning och lärande.

Att göra regler explicita

I enlighet med Bernstein kan vi säga att kunna skolmatematik är att kunna producera vad som anses som en legitim och godkänd text i det matematiska klassrummet. Därför behöver vi fundera på hur explicita lärarna är mot eleverna när det gäller vad de behöver producera för att lyckas. I vår studie av lärares bedömning av elevers skrivna texter såg vi tecken på hur lärare har olika förväntningar när det gäller vad de kräver och värderar i elevers matematiska arbete. Vissa lärare sökte efter ett koncist symboluttryck för det underliggande mönstret i ett speciellt problem, andra letade efter diskursiva former som kunde läsas och förstås av en vanlig läsare. Jag skulle kunna redogöra för min egen värdering av vad jag skulle föredra att se eleverna producera, men för detta kapitel är jag dock intresserad av om de regler som lärarna baserar sig på är explicita för eleverna. Lärarna spelar här en väsentlig roll, men det gör också forskarna. Cooper och Dunne (1998) har visat hur vardagliga kontexter kan resultera i att arbetarklasselever inte förmår visa sina matematikkunskaper. Kontexten distraherar och placerar dessa elever i vardagen och inte i den skolmatematiska diskursen. Detta förvånar många forskare och lärare då vi antar att vardagskontexter ska göra det möjligt för eleverna att arbeta med det matematiska innehållet och ge mening som kan hjälpa dem att producera rätt svar. De två uppgifterna nedan illustrerar vikten av att reglerna för vad matematikläraren kräver och värderar görs explicita för eleverna.

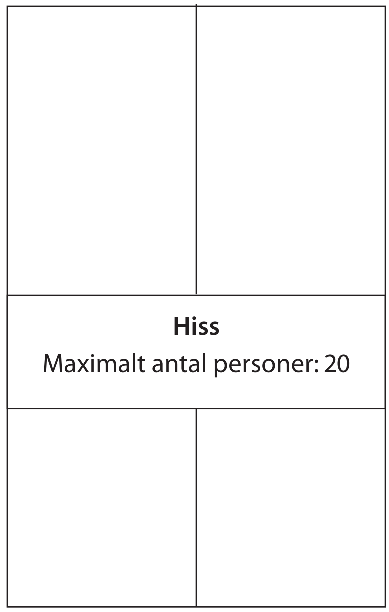
Generellt kan vi enligt Bernstein säga att regler för att producera texter lämpliga i det matematiska klassrummet är osynliga i liberalt-progressiva klassrum. Medelklassbarn missgynnas inte av detta men det innebär en nackdel för arbetarklassbarnen. Även om reglerna i traditionella klassrum är synliga, och därför i princip lika tillgängliga för alla, har de givetvis också sina olägenheter. Som lärare vill vi kanske hålla fast vid vårt liberalt-progressiva sätt, eller utvecklingar mot etnomatematik eller kritisk matematik, men göra reglerna mera explicita. Som forskare eller lärare-forskare skulle vi vilja undersöka effekter av en sådan pedagogisk ingenjörskonst som ett försök att förbättra möjligheterna att lyckas för alla våra elever. De två exemplen nedan rör frågor om regler och hur explicita dessa är för både lärare och elever.

Vad handlar det egentligen om?

Du kan använda följande sidor med dina kollegor eller med dina elever, för att se vilka budskap de har uppfångat när det gäller dina förväntningar på dem.

Hissen

Hissen rymmer 20 personer.
191 personer står i kö för att åka upp i hissen.
Hur många turer med hissen behövs?



Elev 1

Man gör en division
191 ÷ 20 = 9,55
Man kan inte åka mindre än en tur, så det behövs 10 turer.

Elev 2

Man räknar aldrig in 20 personer. Ibland är det fler som tränger sig in. För det mesta gillar folk inte att trängas, så det blir troligen färre varje gång.
Om man är tillsammans med vänner och det bara finns plats för en till så väntar man på nästa, så då blir det också färre.
Om någon är väldigt stor betyder det också att det blir färre.
Om någon sitter i rullstol blir det ännu färre.
Om det är en lång kö och man står längst bak och bara ska till andra våningen så tar man nog trappan i stället.
Om du står långt bak och ska högt upp så kan man gå och ta en kopp kaffe och komma tillbaka senare.
Så man kan tala om ett spann av möjliga turer, någonstans mellan 10, det minsta, och kanske 30 eller 40.

Vilket svar föredrar du?

Beror ditt svar på om detta var en fråga på ett test eller i en klassrumsundersökning?
Vet eleverna vilket svar du vill ha?

Hur många handskakningar?

Om det är 5 personer i ett rum och alla skakar hand med varandra en gång, hur många handskakningar blir det sammanlagt? Hur många blir det om det är 20 personer? n personer?

Elev 1

5 personer, 10 handskakningar
20 personer, 190 handskakningar
n personer, $n(n-1)/2$ handskakningar
Varje n skakar $(n-1)$ händer, för att undvika repetition dividera med 2.

Elev 2

Vi kallar personerna a, b, c osv. Man kan inte skaka hand med sig själv, och om a skakar hand med b så ska inte b skaka hand med a.

Antal personer		Antal handskakningar
2	ab	1
3	ab, ac, ~~ba~~, bc, ~~ca~~, ~~cb~~	$3 = (6 \div 2)$
4	ab, ac, ad, ~~ba~~, bc, bd, ~~ca~~, ~~cb~~, cd, ~~da~~, ~~db~~, ~~dc~~	$6 = (12 \div 2)$
5	ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, de övriga 10 är överstrukna	$10 = (20 \div 2)$ och $20 = 5 \times 4$
10	ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj, bc, bd, be, bf, bg, bh, bi, bj, cd, ce, cf, cg, ch, ci, cj, de, df, dg, dh, di, dj, ef, eg, eh, ei, ej, fg, fh, fi, fj, gh, gi, gj, hi, hj, ij de övriga 45 är överstrukna	$45 = (90 \div 2)$ och $90 = 10 \times 9$

Det blir 10×9, för var och en av de 10 personerna skakar hand med var och en av de andra 9.
Så för n personer blir det $n \times (n-1)/2$

Vilket svar skulle du föredra?

Varför?
Vet eleverna vilket svar du vill ha?

Referenser

Apple, M. (1995). Taking power seriously: new directions in equity in mathematics education and beyond. I W. G. Secada, E. Fennema & L. B. Adajian (Red), *New directions for equity in mathematics education* (s 329–348). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ball, S. J. (2002). *Class strategies and the education market: the middle classes and social advantage*. London: Routledge Falmer.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity*. (reviderad utgåva). Lanham, MD: Rowman & Littlefield.

Billett, S. (2003). Sociogenesis, activity and ontogeny. *Culture and Psychology 9*(2), 133 – 169.

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: teaching styles, sex and setting*. Buckingham: Open University Press.

Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners – and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal*, *27*(5), 589 – 599.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: learning about learning mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Cooper, B. & Dunne, M. (1999). *Assessing children's mathematical knowledge*. Buckingham: Open University Press.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience* Brighton: Harvester.

Graven, M. (2002). *Mathematics teacher learning, communities of practice, and the centrality of confidence*. Opublicerad doktorsavhandling, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.

Hadamard, J. (1945). *The mathematician's mind: the psychology of invention in the mathematical field*. Boston: Princeton.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. New York: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. I J. Boaler (Red), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (s 19 – 44). New York: JAI/Ablex.

Lerman, S. (2001a). The function of discourse in teaching and learning mathematics: a research perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1–3), 87 – 113.

Lerman, S. (2001b). A cultural/discursive psychology for mathematics education research. I W. Atweh, H. Forgasz & B Nebres (Red), *Socio-cultural aspects in mathematics education: an international perspective* (s 3–17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lerman, S. (2003). The function of discourse in teaching and learning mathematics: a research perspective. I C. Kieran, E. Forman & A. Sfard (Red), *Learning discourse: discursive approaches to research in mathematics education* (s 87–113). Dordrecht: Kluwer.

Lerman, S., Xu, G. & Tsatsaroni, A. (2003). Developing theories of mathematics education research: The PME story. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1–2), 23 – 40.

Lubienski, S. T. (2001, april). *A second look at mathematics achievement gaps: intersections of race, class and gender in NAEP data*. Bidrag presenterat vid American Educational Research Association, Seattle.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Prentice Hall.

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: the discourse of investigation*. London: Falmer.

Morgan, C., Tsatsaroni, A. & Lerman, S. (2002). Mathematics teachers' positions and practices in discourses of assessment. *British Journal of Sociology of Education*, *23*(3), 443 – 459.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Anchor.

Slonimsky, L. (1999). Personlig kommunikation, september.

Tsatsaroni, A., Lerman, S. & Xu, G. (2003, april). *A sociological description of changes in the intellectual field of mathematics education research: Implications for the identities of academics*. Bidrag presenterat vid American Educational Research Association, Chicago.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Zevenbergen, R. (2000). ”Cracking the code” of mathematics: school success as a function of linguistic, social and cultural background. I J. Boaler (Red), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (s 201 – 223). New York: JAI/ Ablex.

Möjligheter – inte begränsningar

Att undervisa barn med särskilda behov

BARBARA CLARKE & RHONDA FARAGHER

Reformer som förespråkas i utbildningssystem och av forskare uppmuntrar problemlösning, utveckling av förståelse och tydligare fokus på barns tankestrategier. Flera studier har följt lärare och undervisning som stödjer detta. Ett exempel är *Early Numeracy Resarch Project* som genomfördes under tre år och omfattade 35 skolor och 350 lärare i Victoria, Australien. Studien var främst inriktad på de tre första årskurserna. En av skolorna i studien var en specialskola för elever med lägre prestationsnivå. Det antas att sådana barn saknar förmåga till den typ av matematiskt tänkande som förespråkas i de aktuella reformerna. Innebär detta antagande att vi begränsar möjligheterna för dessa barn? I denna artikel behandlas några forskningsresultat från studien med avseende på barnens kunskapsutveckling i matematik och det inflytande projektet hade på lärarnas metoder och uppfattningar, i synnerhet deras förväntningar på barnens matematiska prestationer. Med tonvikt på fallstudiedata från en av lärarna kommer vi även att visa på några strategier som med framgång använts för att utveckla ett rikt matematiskt tänkande hos dessa barn.

Många vuxna minns skolmatematiken som meningslös memorering av vitt skilda färdigheter utan egentligt sammanhang. Det ledde till ointresse eller, ännu värre, rädsla för själva ämnet (Ginsburg, 1997). Senare tids reformer har fokuserat barns utveckling av förståelse och lärares förmåga att lyssna till och tolka barns matematiska resonemang. Vad innebär detta paradigmskifte för utsatta grupper? I synnerhet, vilka blir konsekvenserna för elever med komplicerade lärandebehov, de som undervisas i särskilda grupper? Hur kan vi stödja deras matematiska utveckling?

Mer om Early Numeracy Rearch Project finns att läsa i artikeln ”Algoritmundervisning i tidiga skolår” på s 21 i denna bok.

Stoessiger (2002) talar om kritiska räknefärdigheter, om att hjälpa elever att utveckla "healthy skepticism about the use of numbers, graphs, statistics and measurements" (s 19). Detta stärker elever när de använder matematik för att kritisera och förstå. Hur stämmer detta in på våra förväntningar på barn med lärandesvårigheter? Att stödja individen är särskilt viktigt för just denna grupp, men är det möjligt?

Traditionellt har förväntningarna på den matematiska prestationen hos barn i specialskola varit låga (Porter, 1998). Förväntningarna kan sammanfattas med "grundläggande överlevnadsfärdigheter". Termer som självförverkligande och matematiskt tänkande har i dessa sammanhang inte tillhört normen. Historiskt sett har också svårigheter att lära matematik ägnats mindre uppmärksamhet än lässvårigheter (Ginsburg, 1997; Rivera, 1997).

I artikeln beskriver vi hur en specialskolas deltagande i ett forskningsprojekt ledde till en omformulering av vad som är möjligt för dessa barn om förväntningarna höjs och om lärare utgår från enskilda, utvärderande och uppgiftsbaserade intervjuer i utformningen av den fortsatta undervisningen.

Det skulle vara fel att påstå att det räcker med att enbart höja lärares förväntningar på elever för att nå påtaglig skillnad i deras resultat. Frågeställningarna inom området är mer komplicerade än så. Det finns många gånger beteendeproblem, ofta sociala skador eller rubbningar, såväl som specifika lärandeproblem som alla måste beaktas. Man kan med största säkerhet säga att en del tidigare arbetssätt inom matematikundervisningen har verkat hämmande för många normalbegåvade elever och troligtvis skapat ännu mer problem för elever i behov av särskilda insatser.

Early Numeracy Research Project, ENRP

Victoria är en delstat i sydöstra Australien och har en befolkning på cirka fem miljoner. År 1998 bekostade delstatens utbildningsdepartement ett forskningsprojekt som under de tre första skolåren skulle undersöka vad som utmärker effektiv matematikundervisning. Elever i dessa klasser är mellan fem och åtta år gamla. Projektet löpte under åren 1999 till 2001 och omfattade 35 försöksskolor varav en specialskola för elever vars prestationer låg på en lägre nivå än i vanliga skolor (Clarke, 2001; Clarke & Clarke, 2004). Projektets mål var att identifiera karaktäristika hos lärare, samordnare och organisationen som förbättrar matematiklärandet. Projektets tre huvuddrag var

- att utveckla och beskriva tillväxtpunkter, *growth points*[1], för förståelse inom olika matematiska områden,
- att skapa och använda uppgiftsbaserade intervjuer enskilt med alla barn två gånger per år,
- att utveckla ett kompetensutvecklingsprogram för alla nivåer i skolorganisationen.

[1] Se även artikeln på s 21

Laverskolan

Laverskolan (fingerat namn) hade under projekttiden cirka 250 elever i åldrarna 5 till 18 år. Eleverna på skolan hade ett brett spektrum av intellektuella och beteendemässiga störningar som påverkade deras förmåga att lära. Deras intelligenskvot låg mellan 50 och 70, vilket är vanligt för dessa grupper. Eleverna gick vidare i årskurserna grundat på färdigheter snarare än på ålder. Studien genomfördes främst på *Junior Primary*, där klassernas storlek vanligen var åtta till tio barn. Där fanns stödpersonal tillgänglig för såväl lärare som elever, lärarhjälp i klassrummet och besökande specialister såsom arbetsterapeut och talpedagog. Rektor och annan personal på skolan var mycket angelägna att få delta i projektet trots att det främst var tänkt för skolor med normalpresterande elever.

Under projektets tre år samlades data in, såväl resultat från intervjuer med elever som olika enkäter ställda till lärarna. Barbara Clarke besökte skolan regelbundet. Rollen som projektkoordinator innebar ansvar för fem skolor. Hon ledde fortbildningsgrupper, en gång per månad efter skoltid, och hon hade heldagar för att utveckla yrkeskompetensen för alla medarbetare. Lärarna intervjuades och observerades under en tvådagarsperiod under projektets sista termin. De citat som följer i artikeln är hämtade från dessa källor.

Projektets påverkan på eleverna

Elevernas kognitiva utveckling

Som redan nämnts var en av huvudpunkterna i ENRP uppgiftsbaserade intervjuer med elever. De genomfördes av lärarna vid början och slutet av varje läsår i de 35 skolorna som omfattades av projektet, men också i 35 noggrant matchade referensskolor. Lärarna i dessa referensskolor deltog inte i ENRP:s fortbildningsdel. Att det fanns referensskolor innebar därför en möjlighet att mäta projektets effektivitet. Formulären som lärarna fyllde i under intervjuerna kodades av en grupp forskningsassistenter och möjliggjorde avläsning av vilka tillväxtpunkter varje barn nått. Med hjälp av en statistisk metod som utvecklats av Horne och Rowley (2001) omvandlades data till en skala som gjorde det möjligt att jämföra försöksskolor med referensskolor. Även om det fanns begränsningar i jämförelsen av Laverskolan med den specialskola som var dess referens, var skillnaden i elevernas utveckling häpnadsväckande redan efter det första året. När alla elever som intervjuats i båda skolorna rankades efter sin genomsnittliga tillväxt, låg Laverskolans samtliga 30 elever högre än varje annan elev i referensskolan.

Intervjuernas förmåga att belysa elevers kunskaper

Den mest användbara delen av lärarnas intervjuer kallades ”första årets avvikare”. Denna del var avsedd för alla förstaårselever och för de barn som inte lyckats räkna en liten samling av ungefär 20 små nallebjörnar i plast. En av lärarna beskrev intervjuernas användbarhet för sin planering. Inom parantes anges respektive lärares initialer.

> *Jag satte mig ner för att ta reda på vad de kunde och inte kunde inom respektive område. Den första intervjun utgjorde underlag när jag skrev årets planering. Jag kunde se var de befann sig nu och vad nästa steg behövde bli. ... Några av aktiviteterna i intervjun visade på andra sätt att göra saker än de jag själv kommit på. Så jag har lagt till dessa bland klassrumsaktiviteterna ... det fungerar perfekt. Intervjun täcker allt jag behövde veta.* (HD)

Andra tecken på elevernas matematiska tänkande

Ett del av lärarnas kommentarer på enkäter och intervjuer gav insikter om karaktären hos elevernas matematiska tänkande.

> *Deras språk och matematiska beskrivningar har blivit mer sofistikerade.* (DH)

> *De reder ut saker själva, snarare än att få svaren serverade.* (DM)

När lärarna tillfrågades om elevernas förklaringar och förmåga att diskutera kring sina tankeformer under elevintervjun, gav en lärare kommentaren:

> *Två tredjedelar av dem klarar det absolut. De vet vad de tänker. Vissa av dem saknar fortfarande den språkliga förmågan att uttrycka det. För några av dem måste viss tolkning till från min sida för att få fram hur de verkligen tänker. Jag tror att det matematiska tänkandet förvisso finns där, de kan bara inte uttrycka det.* (DP)

Följande redogörelse från en forskarkollega kastar lite ljus på hur det är att arbeta med just dessa barn, men också på deras förmågor.

> *Läraren presenterade miniräknare för en grupp med elever på många olika kunskapsnivåer. Den första genomgången var en fullkomlig katastrof! Samtliga elever ville göra egna saker under lektionen och gjorde det också. Alla barn var motiverade, men det var alltför svårt för läraren att styra in en grupp på åtta elever till en och samma aktivitet. Hon samlade sig och försökte på nytt. Andra försöket lyckades väl. Samtliga elever klarade att skriva talserier ända upp till tusental. Några kunde till och med utläsa dem korrekt. Hon kunde inte få dem att gå ut och leka på rasten och nu väljer de detta som fritidsaktivitet.*

Elevernas förbättrade självkänsla och förändrade attityd

En av projektets främsta effekter, som rapporterades av lärarna, berör elevernas inställning till matematik. En erfaren lärare uttryckte sig så här:

> *De verkar mycket mer intresserade nu. Under mycket lång tid har det varit så, inte just bara i denna grupp utan över lag, att man sagt, okej, nu är det dags för matte och då har de bara stängt av. Jag vet inte om det spelar någon roll att vi kallat ämnet ”numeracy” i år, i stället för ”maths”, och om det har gjort någon skillnad. Det kan också bero på att alla gör konkreta saker, att alla arbetar på just sin rätta nivå, och att de sporras av detta.* (intervju, HD)

Vid två tillfällen ombads lärarna på skolan att lämna skriftliga kommentarer om projektets påverkan på eleverna. Det gemensamma bland dessa kommentarer rörde elevernas uppskattning av och självförtroende i matematik. Följande kommentarer från en av lärarna belyser detta:

> *Barnen verkar utveckla starkare självförtroende och tycker bättre om matteaktiviteterna.*
>
> *Barnen berättar mer om vad de gör och utvecklar på så vis sin förståelse.*
>
> *Barnen ser fram emot mattelektionen varje dag.*
>
> *Barnen är mer villiga att ge sig i kast med nya uppgifter, vilket innebär att deras tänkande och deras problemlösningsförmåga utvecklas.* (DM)

Påverkan på lärarna

Nya förväntningar

På varje skola som medverkade i projektet upprättades ett lokalt ENRP-arbetslag, bestående av lärare från skolan och en ENRP-koordinator. Arbetslaget gick tillsammans på fortbildning och höll regelbundna möten. På Laverskolan ingick fyra lärare i laget. Under projektets tre år ändrades bemanningen något. Efter projektets första år ombads lärarna kommentera hur ENRP påverkat deras arbete. Några av de skriftliga kommentarerna löd:

> *Vi är mycket mer entusiastiska över att undervisa i matte!*
>
> *Vi känner oss modigare i att testa nya aktiviteter och vågar ta risker (och delar såväl framgångar som misslyckanden).*
>
> *Vi utmanar eleverna mer genom problemlösningsaktiviteter där de själva ska tänka ut lösningar.*
>
> *Mycket tydligare fokus på elevernas egna tankar.*
>
> *Försöker förse barnen med positiva erfarenheter som stärker självförtroendet.*

Vid det sista fortbildningstillfället inom projektet ombads lärarna att dokumentera hur deras undervisning hade förändrats av deras deltagande i ENRP. En av lärarna skrev:

> *Jag har märkt hur ofta matte dyker upp i vår vardag. Jag använder dessa tillfällen för att gå igenom mattebegrepp, även det mest grundläggande, i klassrummet. Matte behöver inte vara det svåra, trista och besvärliga ämne som jag så ofta erfarit under mina år i primary school.* (KR)

När hon ombads ge andra lärare råd, skrev hon:

> *Ha kul med matte. Var inte rädd för att dela med dig av matteidéer till andra. Ibland finns det mer än ett rätt svar.* (KR)

Helt tydligt har hennes syn på grunderna för matematisk förståelse förändrats och gjort avtryck i hennes egna uppfattningar och förväntningar på eleverna. Denna förändring är också tydlig i en kommentar från en annan lärare. Kommentaren beskrev projektets inflytande på lärarlaget som ”reflektion kring och utmaning av våra föreställningar om hur vi tror att barn utvecklar förståelse och färdighet i matte.” Förväntningarna på vad, och i vissa fall även om, dessa barn kan förstå genomgick en förändring.

> *Jag måste erkänna att jag blev rejält överraskad över hur mycket två eller tre av dem kunde när jag testade dem. De kunde långt mer än jag insett. Några av dem hålls tillbaka i sin utveckling eftersom de ännu inte behärskar själva räknandet: ett, två, tre, sen blir det fel. Men när vi överskrider den gränsen är det fantastiskt hur stor deras förståelse är. Jag var verkligen mer än häpen över vissa resultat.* (DP)

Ett argument när man diskuterar undervisning av elever i behov av särskilda utbildningsinsatser, brukar vara att undervisningen ska vara tydligare. Ofta tolkas detta som ett behov av mer ”berättande” för eleverna, men för studiens lärare handlade det mer om vilka frågor som de ställt till eleverna.

> O*avsett vilken aktivitet vi ägnar oss åt finns en mängd frågor att ställa. Så jag frågar och fortsätter att fråga tills jag når gränsen för deras förmåga i just den uppgiften.* (DP)

Carnine (1997) ger förslag på lämpliga metoder i matematikundervisning för barn med lärandesvårigheter och förespråkar undervisning av ”big ideas” som har ”rich explanatory and predictive power” (s 133). Dessa synliggör strategier och erbjuder en klar och tydlig undervisning av dem. Undervisningen blir tidseffektiv och metoden tillhandahåller passande övningar och möjligheter för reflektion. Goldman och Hasselbring (1997) argumenterar mot övning av isolerade färdigheter, de förespråkar istället undervisning där färdigheter tränas i meningsfulla sammanhang och innehåller verklighetsnära uppgifter.

I nästa avsnitt tittar vi lite mer detaljerat på hur en av lärarna undervisade. Denna lärare deltog i projektets alla tre år.

En lärares undervisning

Mary Donellys klassrum var en unik miljö. Där undervisades åtta barn, sju pojkar och en flicka, under sitt första skolår, *Prep class*. De flesta hade en besvärlig bakgrund. I klassen gavs eleverna inblick i hur skolan fungerar, vad man gör och hur man uppför sig. Flera elever hade stora beteendestörningar. Detta medförde att Mary ibland ifrågasatte hur mycket eleverna faktiskt lärde sig. Ett tema som tydligt framgick av studien var lärarens förmåga att fånga den matematik som fanns i ett visst tillfälle. På väg till lärarrummet efter en av morgonlektionerna ursäktade sig Mary för att inte ha lyft fram särskilt mycket matematik under lektionen. Ändå visade anteckningarna från lektionen att avsevärda mängder hade behandlats. De flesta av de dagliga aktiviteterna, som *Almanackan* och *Dagens schema* omvandlades till matematikmöjligheter.

Under lektionerna fanns alltid klar och återkommande inriktning på de ”stora idéerna” i det berörda ämnet, till exempel skutträkning, som syntes i valet av frågor och aktiviteter. Ett exempel på detta märks i Marys anpassning av ”stjärndiagrammet”, hennes sätt att belöna klassen för gott uppförande under morgonsamlingen. Under en samling spände matematiken över följande områden:

– Räkna med ett steg och med fem steg i taget.

– Räkna vidare från ett visst tal (t ex 12) med ett steg i taget.

– Räkna vidare från olika multipler av 5.

– Relativa begrepp som mest, mer, nästa.

– Addition runt givna femtal. (Jack har 2. Hur många behöver han för att få 5?)

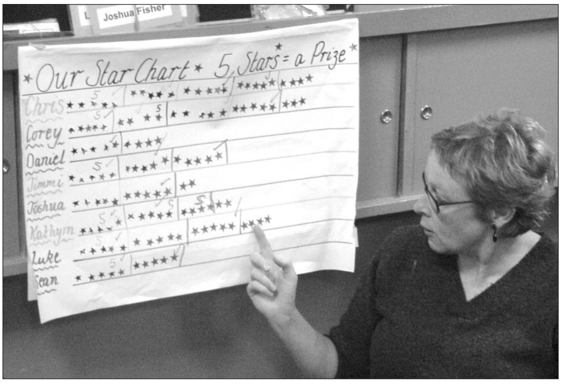


Bild 1. *Mary med stjärndiagrammet.*

För att få ut mesta möjliga av den matematik som finns i de dagliga rutinerna behöver språket uppmärksammas, i synnerhet matematikens terminologi. Mary betonade ord i meningar som t ex ”Vem har *flest* stjärnor?”, ”Kan du säga mig vad det blir *imorgon*?”, ”Vad kommer *efter* det?” Det blir uppenbart att de betonade orden är de som har matematisk betydelse. Vi fann tydliga tecken på att Mary anpassade uppgifterna för att bättre passa respektive elevs förståelsenivå:

M: *Titta! Vem har flest stjärnor? Vi räknar Chris stjärnor. 1, 2* (eleverna räknar med)*, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24! Han har 24 stjärnor!*
M: *Vi kan fråga Kathryn om hon kan hitta ett annat sätt att räkna, för hon kan räkna 5 i taget!*
K: *5, 10, 15, 20, 25!*
M: *Ahh. 25? 20...*
K: *25*
M: *25?*
K: *Ahh, 24!*

Lärarens förmåga att anpassa uppgiften liksom hennes kunskap om varje barns aktuella kunskapsnivå var tydlig. Alla elever räknade ett i taget och sedan fick Kathryn hjälp att räkna vidare i steg om fem. Lägg märke till att hon räknade fel och först inte förstod att hon måste räkna de fyra sista stjärnorna en och en. Samtliga elever lyssnade när hon räknade på detta vis. Även om de själva inte var redo att räkna med steg om fem, blev de medvetna om att det är möjligt.

Trots att Mary ofta använde sig av undervisning i hel grupp möjliggjorde det lilla antalet elever att hon kunde uppmärksamma den enskilda eleven. Ovanstående exempel visar hur hon kunde använda sin kunskap om respektive elevs förståelse i ett samtal med hela gruppen. Följande exempel visar hur denna kunskap också blir till stöd när det gäller val och utformning av uppgifter.

En lektion utgick från en julsång, *The Australian Twelve Days of Christmas*, och gav flera uppgifter med anknytning både till visan och berättelsen. Barnen läste först berättelsen som en helklassaktivitet och lade därefter ut illustrationer efter en tallinje. På bilden syns att linjen visar siffrorna i fallande ordning. Här jobbade Mary med nedräkning (bild 2). Hon riktade in sig på begrepp för ordningsföljd, till exempel ”vilket kommer sedan?”. Efter grupparbetet fick eleverna egna bilder och uppgifter som anpassats till deras nivå.

Bild 2. *Mary förklarar uppgiften.*

En elev började placera illustrationerna från 1 och fick sedan utmaningen att försöka räkna ner (bakåt) från 12 (bild 3).

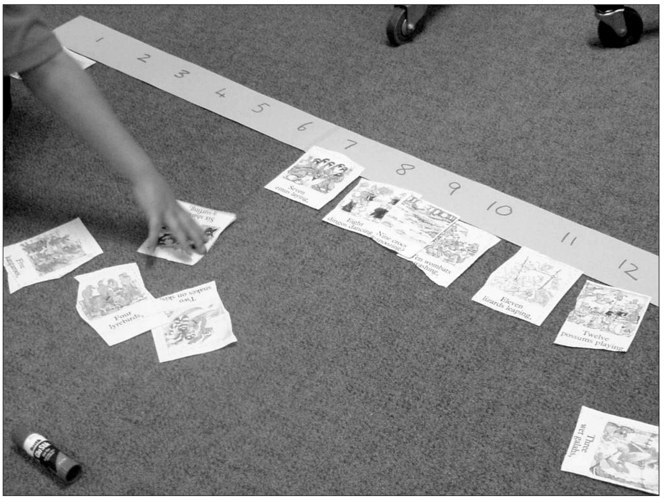


Bild 3. *Elev sysselsatt med nedräkning.*

Ett barn fick hjälp med att placera illustrationerna i rätt ordning och bild 4 visar honom i färd med att göra klar färgläggningsuppgiften.

Bild 4. *Färgläggningsuppgift.*

Ett annat barn höll fortfarande på att lära sig räkna till 10. Detta barn fick en tallinje med tal i stigande ordning. Mary använde olika strategier för att få större kunskap om elevernas ytterligare specifika behov. Miljön i klassrummet innebar inte bara en utmaning för eleverna, utan också för läraren. En genomgång av utskrifterna med fokus på antalet interaktioner under helklassdiskussioner visade många avbrott. I utskrifterna för en dag var medelantalet interaktioner enbart två! Fokus på uppgiften var alltså inte ett utmärkande drag i denna klass. Mary ägde dock förmågan att återskapa fokus, leda tillbaka och ta upp nyckelidéer under de korta stunder som bjöds.

Ytterligare en strategi som märktes under Marys lektioner var repetition. Under samtliga tre observerade lektioner användes kalendern, stjärndiagrammet och dagens schema. Liknande frågor ställdes vid varje tillfälle. Rutiner och upprepningar ledde till att barnen lärde sig hur de skulle svara på frågorna. Repetitionerna vittnar om att principen om *överinlärning* tillämpades, något som anses betydelsefullt för barn med lärandesvårigheter. Överinlärning innebär fortsatt övning och förstärkning även efter det att eleven visat sig klara uppgiften. Detta är viktigt för att ytterligare befästa ny kunskap och förhindrar att den nyvunna kunskapen senare försvinner för lätt. Arbetet ägde rum i en miljö rik på möjligheter till matematiska övningar där elevens egen utforskarlust också uppmuntrades.

Matematiken hade sin givna plats i klassrumsmiljön. Det livliga klassrummet var fullt av olika diagram och aktiviteter. Matematiska figurer och planscher fanns uppsatta i lagom höjd för barnen. På bild 5 skymtar stjärndiagrammet och dagens schema. Dessa fanns ständigt tillgängliga och var bekanta för eleverna. Om eleverna hade lektionstid kvar efter avslutad uppgift tilläts de välja aktivitet själva. Under matematiklektionerna skulle valet göras från det särskilda matematikskåpet. Under observationslektionerna valde eleverna pussel, kortspel, klossar, geometriska övningar och postorderkataloger.

Bild 5. *Mary räknar med barnen.*

Det har visat sig att barn som bildar och utvecklar begrepp behöver konkreta föremål som har anknytning till barnet. Laborativt material, utan koppling till världen utanför klassrummet, riskerar att betraktas som overkliga av barnen (Payne, Towsley & Huinker, 1990). Eftersom eleverna fick lov att leka med materialet, blev de bekanta med det och kände igen det i matematikundervisningen senare. I en intervju som följde på ett observationstillfälle hänvisade Mary till sin användning av laborativa material.

I: *Hur är det med matteleksakerna i skåpet? Har du märkt något särskilt när du använder dem senare i undervisningen?*

M: *Tja, det är inte alltid fri lek. Ibland skriver jag upp elevernas namn vid någon av aktiviteterna och de måste själva hitta sitt namn för att veta vad de skall göra, t ex 100-tavlan för Kathryn, använda vågen för Chris eller vattenlek för Luke. På så vis kan jag styra en särskild elevs utforskande en aning. Utforskning är svårt. Det är svårt att få dem att ha tålamod att hålla på med en uppgift tillräckligt länge för att lösa den.*

Till och med i den erkänt besvärliga första årskursen deltog alla elever aktivt i att lära sig matematik. Ingenting tydde på att några matematiska begrepp skulle överstiga vissa elevers förmåga. Alla förväntades lära sig och uppgifterna anpassades till eleven om så krävdes. Marys metoder byggde mycket på det Carnine (1997) förespråkar, men hon insåg även betydelsen av informell matematik, något som anses mycket viktigt för små barns matematiska utveckling (Ginsburg, 1997).

Marys metoder förfinades snarare än förändrades inom projektet (Miller & Mercer, 1997). I denna bild av hennes undervisningsmetoder ser vi drag av en för barn med lärandesvårigheter effektiv matematikpedagogik som förespråkas av flera forskare. Här ses behovet av praktiska övningar och reflektion, fokus på stora idéer inom matematiken och att göra strategier både synliga och förståeliga (Carnine, 1997), så väl som effektiva metoder från ENRP (Clarke & Clarke, 2004). Bland de senare kan nämnas att ta till vara undervisningsbara ögonblick, skapa samband mellan matematiska idéer och tidigare lektioner eller erfarenheter, att ha höga men realistiska förväntningar på alla barn samt att använda olika material, representationer och sammanhang för samma begrepp. Hon visade också prov på Goldmans och Hasselbrings modell, i det att hon vävde in viktig färdighetsträning när meningsfulla problem löstes.

Vid det sista fortbildningstillfället inom ENRP beskrev Mary Donnelly hur hennes yrkesutövning förändrats under projektets gång:

> *Jag har blivit mer fokuserad på hur och varför jag arbetar med aktiviteter och är mer rakt på sak i mina frågor. Jag låter barnen leka mer med praktiskt material före och under en aktivitet och ger mer tid för eftertanke och låter dem komma med en rad möjliga lösningar. Jag tror att barnen kan prestera mer genom att tänka ut saker på egen hand.* (DM)

Viktigast av allt var att hon förenade undervisningen med den matematiska, beteende- och bakgrundsmässiga kunskapen om varje individ för att kunna erbjuda en stödjande och matematiskt rik lärandemiljö.

Slutsatser

Lärare stöter i sin yrkesutövning på en mängd olika problem, begränsningar och behov. På Laverskolans avdelning för de yngsta barnen var situationen mycket komplex. Vilken genomslagskraft hade ENRP i dessa klasser? Istället för att fokusera de svårigheter som uppenbarade sig och sänka sina förväntningar på vad eleverna kunde uträtta, anpassade lärarna sin undervisning efter fortbildningen. Därför kunde de erbjuda eleverna en rik, lustfylld och meningsfull miljö där eleverna kunde lära sig matematik.

Som en av lärarna påpekade i ett tidigt stadium av projektet: ”barn älskar matte … jag brukade säga saker som ’om du inte kan leka på ett trevligare sätt får du gå in och arbeta med matte’. Matte är nu alldeles för kul för att jag ska kunna komma med några sådana hot”.

Detta rörde sig förvisso enbart om en skola och ett litet antal elever, men dessa barns självförtroende och förmåga till matematiskt tänkande förändrades tydligt. De kommer att stöta på många utmaningar och problem under sin uppväxt, men har nu påbörjat en stärkande process i sin kunskapsutveckling i matematik och de har större möjlighet att utvecklas till kritiskt tänkande, matematikkunniga vuxna.

Lärarna hade kunnat fokusera på barnens *begränsningar*. De valde istället att se till *möjligheterna*. Som en lärare (DM) påpekade: ”underskatta aldrig elever, inte ens specialeleverna”.

Diagnostisk intervju med barn som börjar skolan

Instruktioner

Instruktioner till intervjuaren är skrivna kursivt.
Dessa skall ej läsas upp.

Utrustning

En behållare med 40 nallar i blandade färger.
Ytterligare ett set om 20 nallar, 4 gula , 5 röda , 3 gröna och 8 blå.
6 rosa prickade bildkort inklusive ett blankt kort.
Små rosa kort med siffrorna 0 – 9.
5 plastbägare.
9 sugrör.
4 ljus, alla 2 cm i diameter, 5 cm, 10 cm, 15 cm och 20 cm höga.

→

1. Enklare räkneuppgifter: fler än... färre än, konservering av antal
Placera de 20 nallarna färgmässigt utspridda framför barnet, 4 gula nallar, 5 röda nallar, 3 gröna nallar och 8 blå.

– Sätt de gula nallarna för sig.

– Hur många gula nallar finns det?

Sätt 3 gröna nallar intill de gula nallarna. (Så att två små skilda grupper bildas.)

– Finns det flest gröna nallar eller flest gula nallar?

Fös undan de gula och gröna nallarna.

– Ta fram 5 blå nallar.

– Ställ dem nu på en rad.
(O*m barnet redan placerat dem så, be barnet "flytta ihop dem nu"*)

– Hur många blå nallar är det?

2. Lägesord, mönster, ordningstal

– Ta fram en gul nalle ... Sätt en blå nalle bredvid den ... Sätt en grön nalle bakom den blå nallen ... Ställ nu den gröna nallen framför den blå nallen...

– Titta nu, vad jag gör med nallarna!

Skapa ett mönster med nallarna (grön, gul, blå, blå, grön, gul, blå, blå) framför barnet.

– Jag har gjort ett mönster med nallarna. Vilken färg har den nallen som jag pekar på?

Ge barnet behållaren med nallarna.

– Gör ett likadant mönster.

Om barnet gör ett likadant mönster peka på det, peka annars på ditt mönster.

– Fortsätt en bit med mönstret.

– Vad fick dig att bestämma hur du skulle fortsätta med mönstret?

Peka på den gröna nallen som sitter främst i raden.

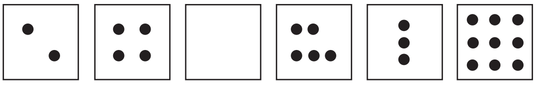
– Den gröna är den första nallen i mitt mönster. Peka på den tredje. Vilken färg har den tredje nallen? Peka på den femte nallen. Vilken färg har den femte nallen?

→

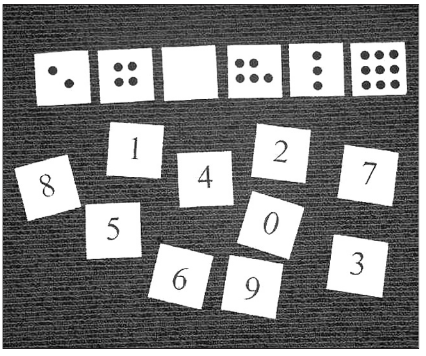
3. Subitisering, ”att uppfatta i en blink” – Para ihop siffra med antal – Principen om räkneordens ordning – Helhet - del- del – Ett-till-ett principen – Storleksordning

– Jag kommer ganska snabbt att visa dig några kort. Berätta hur många prickar du ser på kortet.

Visa varje bildkort, under bara 2 sekunder, i följande ordning och vinkel.



Lägg nu ner korten så som visas ovan. Sprid ut de rosa 0–9-korten slumpmässigt, framför barnet mellan korten med prickarna och barnet.



– Hitta talet som hör ihop med prickarna.
(Om barnet verkar förbryllat över att det finns fler tal än kort med prickar på förklarar du att ”du behöver inte använda alla talen”).

Ta undan prickkorten och kortet med nollan på. Blanda korten och sprid ut dessa slumpmässigt, med talen synliga, på bordet.

– Lägg korten i ordning från minst till störst.

Om barnet lyckas ger du nollkortet till barnet.

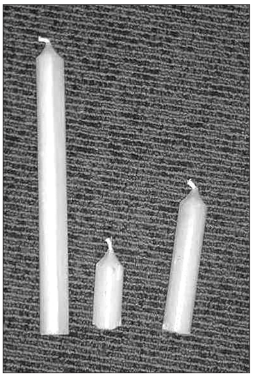
– Var skall detta ligga?

- Visa mig 6 fingrar... (O*m barnet klarar detta …*
  Kan du visa 6 fingrar på något annat sätt? Flera sätt?)
- När man räknar med ett steg i taget vilket tal kommer då efter 4? (O*m barnet lyckas* ... Efter 10? Efter 15?)
- Vilket tal kommer före 3?
  (O*m barnet svarar rätt* ... Före 12? *om barnet svarar rätt*... Före 20?)

Ställ fram 5 bägare på rad. Ge barnet 9 sugrör.

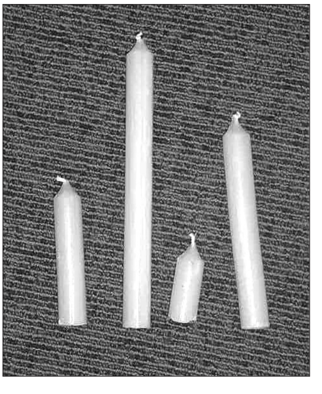
- Sätt ett sugrör i varje bägare.

Lägg ut 3 ljus (20 cm, 5 cm och 10 cm, i exakt den ordningen från vänster till höger).



- Lägg ljusen i ordning från det minsta till det största ... Peka på det största ...Peka på det minsta.

Om barnet klarar uppgiften lägger du till ljuset som är 15 cm. Denna gång lägger du ljusen i ordningen; 10 cm, 20 cm, 5 cm och 15 cm, från vänster till höger.



- Lägg nu ljusen i ordning från det minsta till det största ... Peka ut det största ... Peka ut det minsta.

Referenser

Carnine, D. (1997). Instructional design in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *30*(2), 130 – 141.

Clarke, B.A. & Clarke, D.M. (2004). Mathematics teaching in K – 2: Painting a picture of challenging, supportive, and effective classrooms. I R. Rubenstein & G. Bright (Red), *Perspectives on the teaching of mathematics* (2004 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston, VA: NCTM.

Clarke, D.M. (2001). Understanding, assessing and developing young children's mathematical thinking: Research as a powerful tool for professional growth. I J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Red), *Numeracy and beyond. Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (s 9–26). Sydney: MERGA.

Ginsburg, H. (1997). Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities*, *30*(1), 20 – 33.

Goldman, S.R. & Hasselbring, T. S. (1997). Achieving meaningful mathematical literacy for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *30*(2), 198 – 208.

Horne, M. & Rowley, G. (2001). Measuring growth in early numeracy: Creation of interval scales to monitor development. I M. van den Heuvel-Panhuizen (Red), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, s 161 – 167). Utrecht: Freudenthal Institute.

Miller, S.P. & Mercer, C.D. (1997). Educational aspects of mathematics disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *30*(1), 47 – 56.

Payne, J.N., Towsley, A.I. & Huineker, D.M. (1990). Fractions and decimals. I J.N. Payne (Red), *Mathematics and the young child*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Porter, J. (1998). The understanding of counting in children with severe learning difficulties and nursery children. *British Journal of Educational Psychology*, *68*, 331 – 345.

Rivera, D.P. (1997). Mathematics education and students with learning disabilities: Introduction to the special series. *Journal of Learning Disabilities*, *30*(1), 2 – 19, 68.

Stoessiger, R. (2002). An introduction to critical numeracy. *Australian Mathematics Teacher*, *58* (4), 17 – 20.

Platsvärde i lokal matematik

VENA M. LONG

Matematikundervisning som fokuserar autentiska situationsbundna sammanhang kan bidra till att elever och lärare tar itu med konflikter som kan höra ihop med att leva och arbeta i vissa samhällen. Varje lektion behöver inte vara anknuten till platsen, men varje undervisningstillfälle som förstärks med lokalt intresse kan berika matematiklärandet, samtidigt som arbetet bygger starka band mellan elever och deras närmiljö samt mellan skola och samhälle.

I många länder har trycket från global ekonomi och önskan att "rankas" högt i internationella jämförelser lett till utveckling av nationella mål för matematikutbildningen. För att länder, regioner och samhällen ska få en god ekonomisk tillväxt behövs matematisk kompetens på hög nivå. För att denna ska utvecklas måste den uppfattas som värdefull. I lokalsamhällen, i synnerhet på landsbygden, med starkt inflytande på skolor, ger lärare och elever ofta högre prioritet åt individuell utveckling än åt delstatliga och nationella mål. Lärare och elever hamnar ofta mitt emellan motstridiga prioriteringar. Lärare måste arbeta för en balans mellan att se samhällets behov och att tydliggöra behov i matematik så som de representeras i nationella mål. Ett sätt att åstadkomma detta är att *placera* matematiken i samhället.

Plats påverkar värde. En kappa i garderoben är av ringa värde en kall dag. Sockor i fickorna håller inte fötterna varma. Ett hus vid en sjö kommer att vara mer värdefullt än samma hus utan närhet till vattnet. I vårt decimala talsystem ändrar ett stegs platsförskjutning värdet med en faktor tio. En fyra som används som exponent påverkar värdet av ett uttryck annorlunda än en fyra som används som faktor. Var matematik placeras kan också i hög grad påverka dess värde både för den som lär och för samhället där lärandet äger rum.

Historisk bakgrund

John Dewey (1916) argumenterade för att anknytning till ”plats”är en kritisk del i lärandet. Han hävdade att utifrån barnens synpunkt är det stora slöseriet i skolan att de vare sig kan använda erfarenhet från miljön utanför skolan eller tillämpa det de lärt sig i skolan i dagliga livet. Dewey föreslog att skolorna skulle anknyta till livet utanför skolan, där eleverna lär genom att delta i meningsfulla aktiviteter. Han hävdade även att isoleringen av skolan – och dess isolering från livet – hindrar elever från att koppla sitt lärande till vardagsaktiviteter, inklusive arbete.

Även om Deweys idéer fortfarande är populära myntas regelbundet nya uttryck som behandlar liknande begrepp. Under 1970-talet användes termen *erfarenhetsbaserad inlärning* för att beskriva kontextbaserad undervisning och lärande (Owens & Smith, 2000). Rogers (1969) skiljer erfarenhetsbaserat lärande från kognitivt genom att hävda att det erfarenhetsbaserade tillgodoser behov och önskemål från den lärande snarare än krav i uppgiften, ”Learning while doing” har också kallats *tillämpat lärande* under 1970- och 1980-talen. Nyligen definierade Klopfenstein, Berns och Erickson (2000) *kontextbaserat lärande* som ”lärande som inbegriper att eleven förbinder innehållet med den kontext där innehållet skulle kunna användas”. De betonar att koppling av innehåll till kontext är en lärprocess som skapar mening. Smith (2000) menar att kontextbaserat lärande uppstår när elever ”tillämpar och erfar det som undervisas genom att behandla verkliga problem och behov med anknytning till roller och ansvar hos familjemedlemmar, medborgare, elever och arbetare”.

Den matematiska kontexten

Platsbaserad pedagogik som den tillämpas i matematikklassrummet har utvecklats ur Deweys tidiga arbete med påverkan från Freires pedagogik för förtryckta och en del kritisk teori med inslag av etnomatematik. Många landsbygdslärare och i synnerhet *Rural School and Community Trust*, basunerar ut framgångar med platsbaserad pedagogik som kopplar skolämnen till lokalsamhället (Haas & Nachtigal, 1998; Haskin, 1999; Theobald & Curtiss, 2000). Sådan undervisning blandar skolämnets innehåll med kunskap om samhället och syftar till att värdesätta både skolämnen och det samhälle där elever studerar dessa ämnen.

För många matematiker ligger matematikens värde främst i dess logik, sanning och skönhet. Kontext eller miljö är oväsentliga. För andra är matematiken ett språk och ett sätt att tänka; återigen är kontext underordnad kommunikation av inblandade kvantiteter och relationer. För de flesta elever och föräldrar ligger dock matematikens värde främst i dess nyttighet. Med andra ord, matematiken är värdefull för att den är användbar.

Romberg (1992) formulerade denna konflikt efter utvecklingen av 1989 års *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*,

> ... the challenge we now face is how to create a curriculum filled with responsible social and political issues that will help students understand the complexity of such problems, help them develop and understand the role of mathematics in their resolution, and allow them at the same time, to develop mathematics power.
>
> (s 435)

The National Science Foundation finansierade utveckling av Standards-baserade matematikkursplaner som låter elever lösa problem, undersöka idéer och göra kopplingar till dagligt liv. Men, för att de ska vara allmänt accepterade och användbara måste de anknytas till majoritetens kontext. Exempelvis har få av dessa kursplaner tillämpningar som ansluter direkt till landsbygdens kultur (Schultz, 2002).

Ursprungligen var frågor kring ekologi, ekonomi och demokratiskt medborgarskap centrala för den platsbaserade pedagogiken. Lärande eller användning av matematik var av underordnad betydelse och tenderade att vara trivial. När arbetet utvecklades kunde dock Smith (2002) identifiera fem tematiska mönster som uppfångades i platsbaserad utbildning: Kulturella studier, naturstudier, problemlösning i verkligheten, praktik och företagarmöjligheter och introduktion i samhälleliga processer. Dessa kategorier möjliggör en breddning av tilllämpningar av platsbaserade principer till en mycket större andel av kursplaner och specifikt till matematik.

Problemlösning i verkligheten som den beskrivs av Smith (2002) innefattar att engagera elever i att identifiera skol- eller samhällsfrågor som de vill undersöka och ta itu med. Elever spelar en avgörande roll i att identifiera problem, att välja ut något som fokus för klassen, att studera dess karakteristika och dynamik, att utveckla potentiella lösningar och sedan organisera och delta i försök att lösa problemet – allt centrala aspekter i en stark matematikundervisning. Läraren blir handledare i denna process för att styra problemet mot kursplanemål, att ge eleverna nödvändiga resurser och fungera som stöd i det pågående lärandet för att nå den slutliga produkten – antingen det ger en lösning eller bara en fördjupad förståelse av problemets komplexitet.

Från *Principles and Standards of School Mathematics*, PSSM från National Council of Teachers of Mathematics (2002):

> Students confidently engage in complex mathematics tasks ... draw on knowledge from a wide variety of mathematical topics, sometimes approaching the same problem from different mathematical perspectives or representing the mathematics in different ways until they find methods that enable them to make progress ... are flexible and resourceful problem solvers ... work productively and reflectively ... communicate their ideas and results effectively ... *value* mathematics and engage actively in learning it.
>
> (s 3)

Detta kommunicerar tydligt en vision av aktiv involvering i matematik. På följande sidor slår PSSM fast:

> school mathematics experiences at all levels should include opportunities to learn about mathematics by working on problems arising in contexts outside of mathematics. These connections can be to other subject areas and disciplines *as well as to students' daily lives* (författarens kursivering). (s 65)

Ett sätt att uppnå denna nivå av aktivt engagemang är att placera matematiken i relevanta och autentiska kontexter.

Antingen vi talar om platsbaserad, kontextnära undervisning och lärande eller något annat behöver varje person som lär sig möjligheten att se matematiken i sitt eget liv. På många sätt stödjer kontextbaserad undervisning och kontextbaserat lärande sådant som effektiva utbildare alltid har gjort. Till exempel hävdar Howey (1998) att kontextbaserat lärande lägger tonvikt på tänkande på högre nivåer, kunskapsöverföring, insamling, analys och syntetisering av information och data från många källor och perspektiv. Sådana tillfällen är avgörande för framgång för elever som är i riskzonen beroende på kulturella, etniska, geografiska och ekonomiska skillnader.

Enligt Smith (2002) kan utbildare som grundar sin kursplan på platsanknytning återfinnas i landsbygds- och stadsmiljöer, i mindre och större skolor (s 587). Enligt Paul Gruchow (1995) har ”landsbygdsbarn utbildats att tro att alla slags möjligheter finns någon annanstans. Det senaste halvseklets landsbygdserfarenheter av misslyckande och nedgång har till största delen berott på landsbygdsmänniskornas inkompetens eller obetydlighet” (s 91).

Utflyttning av människor från landsbygden försåg fabriker i städerna med arbetare. Råämnesproducerande industrier som gruv- eller skogsnäring exploaterade den lokala befolkningen medan de forslade bort värdefulla resurser från dess källor. Utbildningen på landsbygden, och ibland också i städerna, anklagas ofta för att även den vara utvinning av råämnen. Utbildning basuneras ut som en biljett till någon annanstans, och de bästa och mest begåvade uppmanas att ge sig av. Platsbaserad pedagogik försöker vända på både utflyttningen av ungdomar och på nedvärderingen av de samhällen där elever och föräldrar bor.

Relevans i dagens samhälle

För att samhällen och regioner idag ska överleva ekonomiskt måste den matematiska kompetensen utvecklas till höga nivåer. För att denna ska kunna ske måste dess värde erkännas. Enligt *Before it's too late* (National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century, 2000) är matematisk kompetens nödvändig för att bygga en ekonomisk bas beroende på ”den snabba förändringstakten både i det ökande ömsesidiga beroendet i den globala ekonomin och i den amerikanska arbetskraften” (s 7).

Dessutom avslöjar forskning att fattigdom och isolering i landsbygdsområden påverkar utbildningens infrastruktur på samma sätt som den gör i stadsområden. Genom en noggrann genomgång av forskningen kring landsbygdsundervisning lade Kannapel och DeYoung (1999) märke till en betydande konflikt inom landsbygdsskolor med hänsyn till kursplaner, undervisning och utvärdering. Å ena sidan erbjuder nationella och delstatliga utbildningsreformer mål för alla elever och skolor. Dessa mål representerar det som är nödvändigt för att bygga en stark nationell infrastruktur i matematik. Eftersom regioners, skolors och lärares ansvar ofta är kopplat till målen måste alla inrikta sig på dessa. Å andra sidan har lokalsamhället, som ofta har starkt inflytande på skolor, högre prioritering av individuell utveckling och bidrag till samhället. Lärare och elever hamnar emellan dessa motstridiga prioriteringar. Båda måste arbeta för balans mellan att inse samhällets behov och att hjälpa samhället att förstå sina behov i fråga om matematik. Lärare kan också hjälpa sina lokala samhällen att inse att fördjupade kunskaper i matematik kan gagna samhället och att matematikkunskaper inte behöver reserveras bara för dem som vill lämna bygden.

Utmaningar

Att använda platsbaserad pedagogik i matematikklassrum kan hjälpa elever och lärare att ta itu med de konflikter som hör till att leva och arbeta i vissa samhällen – samhällen som anses avvika från det vanliga – kulturellt, ekonomiskt, geografiskt eller helt enkelt efter eget val. Varje lektion behöver inte vara lokalt anknuten, men undervisningsmaterial av hög kvalitet förstärkt med lokala intressen kan förhöja matematiklärandet och samtidigt bygga starka band mellan elever och deras samhälle samt mellan skolan och samhället.

Autentiska kontexter finns utanför varje klassrumsdörr. Att utnyttja närmiljön kräver dock förfinat pedagogiskt arbete från matematiklärarens sida. Eftersom platsbaserad utbildning till sin natur är specifik för lokala sammanhang är ingen enskild förproducerad kursplan lämplig. Frågor som ställts och undersökts och lektioner som planerats och genomförts kan sällan användas från år till år. Processen måste vara pågående, och det är en *process*, inte en produkt.

För att med framgång införa platsbaserad pedagogik måste läraren först komma till insikt och separera pedagogik från kursinnehåll. I den politiska miljö som finansierar skolväsendet och ställer det till ansvar blandas många röster som vill bestämma vad elever bör och måste lära sig. Lärare är bara en – om än en mycket viktig – röst i denna kör. I genomförandet av undervisningen måste läraren hävda sin auktoritet som expert. Läraren måste vara den avgörande faktorn för att föra samman kursinnehåll och den lärande genom den mest relevanta och kraftfulla pedagogik som finns att tillgå.

Exempel från USA

I Craig, Colorado planerade lärare i *middle school* (12–15 år) en unik matematik- och naturvetenskapslektion på Yampaflodens strand. I samarbete med Colorados naturvårdsmyndighet genomförde elever en vattenstudie som innehöll matematik på många olika sätt, inklusive statistik. Tester av temperatur, surhetsgrad och populationer av ryggradslösa djur ställde krav på enkla analyser av samband. Eleverna lärde sig hur matematik kunde förbättra Yampaflodens kvalitet och därigenom förbättra livskvaliteten och ekonomin i Craig.

I Howard, South Dakota, genomförde en grupp gymnasieelever en studie av penningflödet i lokalsamhället vilken så småningom fick mycket stor nationell uppmärksamhet och förändrade det sätt på vilket den lokala befolkningen spenderade sina pengar. Skatteinkomster från lokala försäljningar började skjuta i höjden. Områdets revisor rapporterade att redan i slutet av sommaren hade de förväntade skatteintäkterna för hela året uppnåtts. Baserat på det genomsnittliga antal gånger som en dollar spenderas inom lokalsamhället uppskattade revisorn att eleverna har åstadkommit ett extra flöde av 6 till 7 miljoner dollar till Howards ekonomi.

En liten landsbygsskola i Alabama skapade ett eget företag för tillverkning av datorer, och använde matematik i stor utsträckning för lagerhållning, fakturering och redovisning. En tredjeklass i en landsbygsskola i Illinois använde matematik för att rapportera resultaten av den utprövning av brandlarm som de erbjudit i lokalsamhället. En liten skola i Dakota öppnade en livsmedelsaffär flera år efter att den sista butiken slagit igen. I en skola i Wisconsin öppnade sjätteklassarna en bokhandel som till slut genererade så stor vinst att eleverna kunde skapa en fond i samhället. I alla dessa fall har gedigna matematiklektioner haft det goda med sig att man bidragit till samhällets välstånd.

Utöver långtidsprojekt av den typ som beskrivits ovan kan också enklare ansatser leda till goda resultat. Platsbaserad pedagogik kan börja med att man ställer frågor kring aktuella händelser. Under vårregnet i ett lantbrukssamhälle kan en lektionsöppning som ”Hur många hektar land skulle man behövt äga för att ha fått 1 000 000 liter vatten i gårdagskvällens regn på 20 mm?” öppna en diskussion om matematik som dessutom rör frågor som är lokalt relevanta. I ett samhälle där lastbilstransporter är en omfattande verksamhet kan trafik med stora långtradare ge intressanta infallsvinklar. Trafikmönster ger intressanta kulturellt olikartade modeller för algebra- eller geometrilektioner. Fiskeindustrin gav innehåll för flera lokalt relevanta lektioner i utvecklingsprojekt på gymnasial nivå. Genom sådana exempel kan lärare visa sin respekt för den lokala ekonomin och också bidra till att öka samhällets respekt för matematikkunnande.

Processen

The Annenburg Rural Challenge, föregångaren till the Rural School and Community Trust, formulerar följande sex principer för platsbaserad utbildning:

- Skola och samhälle ska aktivt samarbeta för att göra den lokala platsen till fokus, där man kan lära, arbeta och leva.
- Elever genomför sammanhängande och ihärdigt skolarbete som utgår från och bidrar till den plats där de bor.
- Skolor speglar de demokratiska värden de söker bibringa.

- Beslutsfattande kring utbildning av lokalsamhällets barn har stöd av expertis både i och utanför skolan.
- Alla deltagare, inkluderande lärare, elever och samhällsmedborgare, tar del i tankeväckande dialoger kring gemensammma åtaganden.
- Skola och samhälle stödjer eleverna, deras lärare och medborgare i dessa nya roller.

(Loveland, 2003)

Den lokala ekonomin, antingen den gäller fiske, gruvbrytning eller skidåkning, kan ge rika kontexter där man kan avhandla viktig matematik. Historiska och kulturella kontexter som traditionella måttsystem eller huskonstruktioner kan hjälpa till att koppla samman elevers rötter med matematikinnehåll. Ett föreslaget nytt bostadsområde, en damm eller till och med en livsmedelsaffär, kan ge material för kritisk matematik. Lärare måste dock vara medvetna om att grävande i vem som är vinnare eller förlorare kan vara mer politiskt laddat än en skola eller ett samhälle kan tolerera.

Lärare kanske inte alltid har den nödvändiga bakgrundskunskapen för att identifiera och vägleda arbete kring viktig matematik som finns inbyggd i lokala kontexter. De kan behöva söka upp expertis lokalt eller annorstädes. Matematiker som är bekanta med området kan sökas genom det lokala näringslivet, colleges eller via Internet. Sociologer som är insatta i den lokala kulturen kan bidra med insikter i rådande tänkesätt i samhället. Denna expertis, tillsammans med lärares eget kunnande, kan borga för att platsbaserad pedagogik genererar högkvalitativt matematiklärande.

Sammanfattning

Att placera matematik i autentiska lokala kontexter är ingen enkel uppgift. Det är en process där produkten per definition blir unik för varje situation. Matematiker, matematikdidaktiker, sociologer och andra professionella måste arbeta tillsammans. Matematiker behövs för att säkerställa att väsentlig matematik identifieras och bearbetas. Sociologer krävs för att säkerställa att den lokala kontexten förstås, representeras och respekteras på ett korrekt sätt. Matematikutvecklare har sedan slutgiltigt ansvar för att hjälpa lärare utveckla den pedagogiska skicklighet och planering som krävs för att säkerställa att verkligt matematiklärande äger rum.

Att lägga ”platsvärde” till matematikundervisningen kommer att stötta lärare och skolor att hitta den känsliga balansen mellan att inse behoven i samhället och att hjälpa samhället att inse behov av matematikkunnande. När elever använder matematik för att förstå sin roll i sitt samhälle kommer de också att få en bättre förståelse för den roll som matematiken spelar för deras egen och samhällets framtid.

Referenser

Berns, R., Erickson, P. & Klopfenstein, B.(2000). Contextual teaching and learning Tillgänglig 20030301 på www.bgsu.edu/organizations/ctl/navigation/constructs.html

Dewey, J. (1916). *Democracy and education: An introduction to the philosophy of education*. New York: Macmillan.

Gruchow, P. (1995). Grass Roots: The universe of home. (Milkweed Editions), Minneapolis: University of Minnesota Press.

Haas, T. & Nachtigal, P. (1998). *Place value: an educator's guide to literature on rural lifeways, environments, and purposes of education*. Charleston, WV: Eric Clearinghouse on Rural Education and Small Schools.

Haskin, J. (1999). Place-based learning: The technology frontier in environmental education. *Educational Technology, 39*(6), 59–63.

Howey, K. R. (1998). Introduction to the commissioned papers. I U.S. Department of Education (Red), *Contextual teaching and learning: Preparing teachers to enhance student success in the workplace and beyond* (s 17–31). Washington, DC: U.S. Department of Education.

Kannapel, P. J. & DeYoung, A. J. (1999). The rural school problem in 1999: A review and critique of the literature. *Journal of Research in Rural Education*, 15(2), 67–79.

Loveland, E. (2003). Achieving academic goals through place-based learning. *Rural Roots*, *4*(1), 6–11.

National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century. (2000). *Before it's too late: A report to the nation from the National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century*. Washington, D. C.: U. S. Department of Education.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

Owens, T. & Smith, A. (2000). *Definition and key elements of contextual teaching and learning* (Talking Paper Series No. 1.04). Seattle, WA: Washington Consortium for Contextual Teaching and Learning.

Rogers, C. R. (1969). *Freedom to learn*. Columbus, OH: Merrill.

Romberg, T. A. (Ed.). (1992). *Mathematics assessment and evaluation: Imperatives for mathematics education*. New York: SUNY Press.

Schultz, J. E. (2002). *Mathematics education in rural communities in light of current trends in mathematics education*. ACCLAIM paper. Athens, OH. Tillgänglig 060619 på www.acclaim-math.org/docs/working_papers/WP_01_Schultz.pdf

Smith, A. J. (2000). *The Washington state consortium for contextual teaching and learning*. Booklet. Seattle, WA: Center for the Study and Teaching of At-Risk Students.

Smith, G. A. (2002). Place-based education: Learning to be where we are. *Phi Delta Kappan*, *83*(8), 584–94.

Theobald, P. & Curtiss, J. (2000). Communities as curricula. *FORUM for Applied Research and Public Policy*, *15*(1), 106–111. Knoxville, TN: University of Tennessee.

Reflektioner kring en videostudie

OTTO B. BEKKEN & REIDAR MOSVOLD

I artikeln diskuteras reflektioner kring en problemuppgift i en japansk åttondeklass. Klassen ingick i 1999 års videostudie från TIMSS, Third International Mathematics and Science Study. Utdrag från lektioner presenteras och följs av diskussion om kompetensutveckling med frågor från en kurs, *Explorations of Algebra Teaching*:

– Varför lät läraren eleverna presentera sina strategier i den ordning han gjorde på lektionen?

– Skulle det inte varit en effektivare väg till algebran att bara presentera slutliga ekvationer och olikheter och bortse från elevers försök på mindre avancerade nivåer?

Som teoretisk grund använder vi en genetisk utgångspunkt, som beskrivs närmare nedan. Därefter diskuterar vi motiv för användning av video i kompetensutveckling, som syftar till att utveckla lärare till reflekterande praktiker.

Problemuppgiften

I TIMSS videostudie från 1999 ingick 28 offentliggjorda lektioner, fyra från var och en av de sju deltagande nationerna. Lektion nr 3 från Japan ligger till grund för våra reflektioner i denna artikel. Läraren presenterar en uppgift för sin klass så här:

> *Det har gått en månad sedan Ichiros mamma lades in på sjukhuset. Han har bestämt sig för att be en bön tillsammans med sin lillebror i templet varje morgon för att mamman snart ska bli bra. I Ichiros plånbok finns 18 tio-yen mynt och i den yngre broderns plånbok finns 22 fem-yen-mynt. De har bestämt att varje gång ta ett mynt från var och en och stoppa i myntboxen. De ska fortsätta be tills endera plånboken är tom. Efter avslutad bön tittar de en dag i sina plånböcker och upptäcker att den yngre brodern har mer pengar kvar än Ichiro. Frågan är: Hur många dagar är det sedan de började be?*

Vi kan se en dokumentation av lektionen från en Lesson Lab-kurs i bilagan i slutet av artikeln. Var och en av de fem elevpresentationerna på tavlan hamnar i någon av följande tre kategorier:

1 En nedräkningsprocedur, antingen med stöd av konkret material eller med hjälp av tabell (som ofta syns på lertavlor från Babylonien 1700 f Kr).

Dag nr	1	2	3	4	...	11	12	13	14	15	16	17	18
Ichiro	170	160	150	140	...	70	60	50	40	30	20	10	0
Brodern	105	100	95	90	...	55	50	45	40	35	30	25	20

2 En regel för beräkning (som i Aljabr av Al-Khwarizmi 825) :

Ta hela differensen 180 – 110 vilket ger 70 och dividera med differensen av brödernas gåvor 10 – 5, som är 5. Detta ger 70/5, dvs 14 dagar innan de har lika mycket pengar. Alltså har brodern mer pengar efter 15 dagar.

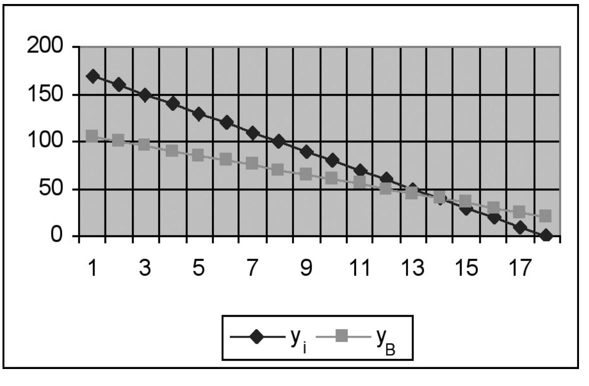
3 Symbolisk representation (som i Bijaganita från Bhaskara 1150):

Låt x beteckna antalet dagar. Låt Ichiros pengar tecknas y_I, och broderns y_B. Då har vi de linjära sambanden $y_I = 180 - 10x$ och $y_B = 110 - 5x$. Summorna är lika när $180 - 10x = 110 - 5x$, med andra ord när $x = 14$. Brodern har mer pengar när $180 - 10x < 110 - 5x$, med andra ord när $x > 14$.

För att lösa ekvationer eller olikheter med symbolisk representation som i modell 3 använder sig eleverna faktiskt också av metoderna 1 och 2. Senare kommer de troligen ha tillgång till ytterligare en metod, nämligen:

4 En visuell geometrisk representation (som i Descartes Geometri 1637):

I ett koordinatsystem kan vi representera det linjära sambandet mellan x och y_I samt mellan x och y_B som punkter på två linjer. I diagrammet ser vi lösningen då Ichiros linje ligger ovanför broderns, dvs då $x > 14$.



Jämför också efterskrift inför utgivningen på svenska i slutet av artikeln.

Med inspiration från Lesson Labs kompetensutvecklingskurs *Explorations of Algebra Teaching* (Hiebert m fl, 2003) formulerar vi följande frågor för lärares reflektion:

- Varför lät läraren eleverna presentera sina strategier i den ordning som visas ovan? Vilka är fördelarna med att låta eleverna dela med sig av sina alternativa lösningar?
- Vore det inte mer effektivt att närma sig algebra genom att bara presentera de slutliga ekvationerna och olikheterna? Att bara lägga elevförslagen på lägre nivå åt sidan?

Från den genetiska ståndpunkten skulle våra omedelbara reflektioner på dessa frågor vara:

> En utbildares uppgift är att låta barnets tänkande följa de stigar som förfäderna en gång beträtt, att röra sig kvickt genom vissa passager men inte undanhålla något. I detta hänseende måste den vetenskapliga historien vara vår guide.
>
> (Henri Poincaré, 1889)

Den indiske matematikern Bhaskara tar på 1150-talet upp många problem av den här karaktären i sin bok om aritmetik och algebra. Han löser dem såväl aritmetiskt som symboliskt där *ya* står för vårt *x* och *ka* står vårt *y* (Bekken, 1984, s 18 – 22). Han ger också en filosofisk, didaktisk kommentar:

> De listiga och intelligenta kan möjligen lösa dessa problem genom enbart aritmetiska resonemang. Men den stora utmaningen är att introducera symboler för de obekanta för att sedan bara följa generella metoder.

Den skotske matematikern Colin Maclaurin definierar 1748 algebra som:

> en allmän beräkningsmetod med särskilda tecken och symboler som har skapats och befunnits användbara just med syfte att lösa vissa typer av problem.

Ursprunget saknar emellertid symboler och hittas i den lärde Al-Khwarizmis begrepp ”Aljabr” i Bagdad på 800-talet, med än tidigare rötter i den indiska astronomen Brahmaguptas skrifter från 600-talet, eller kanske så långt tillbaka som i det forntida Kina.

Några argument för en genetisk ståndpunkt

Idéer om kunskapers uppkomst och utveckling har alltid spelat en roll i undervisningsteori och praktik. I själva verket talar vi om ett nät av principer i historiska, psykologiska, biologiska, logiska, kognitiva, sociala, kulturella, kontextuella, situationsspecifika sammanhang kring uppkomst och utveckling av matematiska idéer, metoder och begrepp (Bekken, 2000; Mosvold, 2001).

Schubring (1978) spårar idéer nära fem århundraden bakåt i tiden. Den historisk-genetiska metoden syftar till att leda elever från grundläggande till mer komplex kunskap på ungefär samma sätt som mänskligheten utvecklat matematiken historiskt. Målet med den psykologisk-genetiska modellen är att låta elever återupptäcka eller återuppfinna matematiken. Vi citerar några tidiga pionjärer och kommenterar mer ingående de tidigare ställda frågorna.

Tidiga versioner: Bacon, Comenius och Lindner

Francis Bacon (1561 – 1626) introducerade ”the natural method of teaching”. Comenius och Ratke grundade sitt arbete på Bacons undersökningar och dessa tre tillsammans betraktas som de gentiska principernas föregångare. Bacon utvecklade en teori eller en ”method for discovering new knowledge”, den induktiva metoden. Han kallade den en naturlig metod eftersom dess grund var ”the very nature of things” (Bacon, 1994, s 17).

Metoden går ”från det specifika till det generella”. Vi skulle kunna påstå att detta är precis så som barn lär sig. Först stöter de på specifika fall av olika fenomen, senare märker de att generella principer existerar, och att de specifika fallen ingår under de övergripande principerna. Just tanken att det finns en koppling mellan hur barn förvärvar kunskap och hur kunskap i sig har vuxit fram är grundläggande. Bacon menade att ”the teacher's task should be to lead his pupils on to the roads of science, in the same way as he himself had arrived there” (Bacon, 1994, s 125).

När Bacons metod tillämpas i undervisning ska vardagsproblem, de specifika fallen, vara utgångspunkt. Först senare ska matematiken göras abstrakt. Symboliska uttryck ska inte utgöra starten, symboliseringen sker gradvis längs vägen. Det kognitiva subjektet, som Bacon kallade det, måste aktiveras tillsammans med det kognitiva objektet, dvs eleverna måste vara aktiva för att förvärva kunskap. Detta är en välkänd tanke när det gäller synen på lärande inom konstruktivism och andra teorier om återupptäckter (van Amerom, 2002).

Johan Komensky (1592 – 1670) är mer känd som Comenius. Han var en tjeckisk filosof, utbildare och poet. Han ses som en av grundarna till den allmänna pedagogiken genom sitt verk *Didactica Magna*, slutfört 1657. Hans pedagogiska grund vilar på tanken att alla människor är medskapande varelser (Comenius, 1975).

Friedrich Wilhelm Lindner (1779 – 1851) inspirerades till sina metoder genom Bacons O*rganon*. Lindner kritiserade hårt skolans tidsschema, med mönstret lektion – rast – lektion. Han menade att den genetiska metoden kräver uthållighet och att alltför täta ämnesbyten bara distaherar (Schubring, 1978, s 59).

Benchara Branford

När Branford publicerade *A Study of Mathematical Education* 1908 var detta något nytt i den engelsktalande kultursfären. Hans bok pekar på relationen mellan individens utveckling av matematikfärdigheter och matematikens historiska utveckling. Branford hade arbetat som lärare i många år och hade sitt eget sätt att se på lärarens roll. Läraren ska sträva efter att strukturera undervisningen så att den stämmer med utvecklingen av kunskap i mänsklighetens historia. Alltså måste en lärare vara medveten om historien (Branford, 1924, s 244).

Branford ger många exempel från sina lektioner. Vi ska börja med idéer som eleverna har med sig till skolan från sitt vardagsliv. Vi ska möta våra elever som modiga, unga pionjärer och deras övertygelser ska möta respekt och den milda kritik som är lämplig för upptäckare av nya begrepp (s 11).

Felix Klein och genetiska principer

Felix Klein (1849–1925) utvecklade en matematik med koppling till sunt förnuft och ständiga referenser till historien. Mot slutet av sin karriär sysslade Klein främst med utbildningsfrågor. Boken *Elementary Mathematics – from an Advanced Standpoint*, publicerades ursprungligen på tyska i början 1900-talet. Där börjar Klein med att visa hur elever ska undervisas om tal, grunden för all aritmetik. Han beskriver detta på följande vis (Klein, 1945, s 6):

> Hur detta ska läras ut och genomföras kan kanske bäst beskrivas med orden intuitivt och genetiskt, med andra ord, hela strukturen ska gradvis resas på en välkänd grund av konkreta ting, i tydlig kontrast till den logiska, systematiska metoden.

Det är ett vanligt argument att matematik kan och bör läras ut med deduktiv metod; genom att börja med vissa fakta och logiskt fortsätta därifrån. Om detta säger Klein (1945, s 15):

> Matematiken har växt som ett träd som inte börjat vid de minsta rotdelarna och sedan bara växer uppåt. Snarare skickar den sina rötter djupare och djupare samtidigt och med samma hastighet som grenar och löv växer och sprider sig uppåt ... Matematikens utveckling började en gång från en viss punkt som svarar mot vanlig mänsklig förståelse och har fortsatt från den punkten i enlighet med kraven från vetenskapen i sig och förhärskande intressena, i den ena riktningen mot ny kunskap, i den andra genom studier av grundläggande principer.

Förståelsen för grundläggande principer förändras ständigt, enligt Klein, det finns inget slut och alltså heller ingen utgångspunkt som skulle kunna erbjuda ett absolut fundament.

> Undervisning ska långsamt leda den mot högre ting, för att slutligen leda fram till abstrakta formuleringar. Den bör i denna utveckling följa den väg längs vilken mänskligheten kämpat sig fram, från ett naivt ursprung mot högre former av kunskap.
>
> (s 268)

Klein påpekar att det är nödvändigt att ofta upprepa denna princip eftersom det är mycket vanligt att påbörja undervisning med de mest allmänna begreppen. Han säger vidare:

> Ett väsentligt hinder för spridningen av en sådan naturlig och sant vetenskaplig undervisningsmetod är bristen på historisk kunskap, som så ofta gör sig påmind.

Mot slutet av sin bok sammanfattar Klein sin syn (s 236):

> Om du saknar orientering, om du inte är kunnig rörande matematikens intuitiva element och de vitala relationerna till angränsande ämnen, och om – framför allt – du inte känner till den historiska utvecklingen kommer ditt fotfäste vara mycket osäkert.

Genom sin organisation av elevernas lösningspresentationer följer den japanska läraren den genetiska utvecklingen historiskt och psykologiskt liksom flera andra ovan citerade idéer. Lektionen följer den väg som beskrivs av Toeplitz som den indirekta, genetiska modellen (Mosvold, 2003, s 92). För att kunna följa denna måste läraren vara bekant med de matematiska idéernas historia och kunna reflektera över ungdomars kognitiva utveckling.

Andra uppfattningar

Den senaste tidens debatt om matematikutbildning, kallad ”Math Wars” i USA i allmänhet och i Kalifornien i synnerhet, har involverat

- the ”skills” people,
- the ”concepts” people,
- the ”real life applications” people.

Dessa har klart skilda uppfattningar om vilka problem som ska diskuteras och vilka mål som är viktiga (Wilson, 2003, s 149).

Att lära sig matematik innebär också praktisk övning och att memorera. *The Teaching Gap* av Stigler & Hiebert (1999) beskriver bl a undervisning som betonar fakta och procedurer – matematikens färdighetsdimension – men som ofta utesluter utforskandet av de matematiska idéer som hör till dessa färdigheter. Stigler och Hieberts analys visar tydligt hur en undervisningsmodell (script) följs i amerikanska klassrum, i kontrast till de rika diskussioner som förs i andra länder (Wilson, 2003, s 7).

På grundval av data från tidigare videostudier menar Santagata & Stigler (2000) att matematikundervisning är en kulturell aktivitet som skiljer sig mer mellan än inom olika kulturer. De kunde identifiera följande japanska modell:

1 Dagens problem presenteras.

2 Elevernas individuella lösningar diskuteras med klassen.

3 Elever lägger fram och diskuterar lösningsmetoder på tavlan med sammanfattning.

4 Läraren betonar och sammanfattar lektionens huvuddrag.

Lektionsflödet som presenteras i slutet av artikeln stämmer med mönstret ovan. I allmänhet kommenterar japanska elever sina uträkningar på tavlan muntligt, på uppmaning av läraren. De får också svara på frågor och höra kommentarer under sin presentation. Lösningar elever kommit fram till diskuteras sedan gemensamt, till skillnad från i exempelvis Italien där elever utför sina uppgifter direkt på tavlan utan förberedelse.

Den nya videostudien. Mål och resultat i korthet

Varför studera undervisning i olika länder och varför med video? Följande argument finns

- den egna praktiken kan göras tydligare,
- nya alternativ kan upptäckas,
- diskussion om val av undervisningsstrategier stimuleras
- lärares förståelse för undervisning fördjupas
- studier av sammansatta processer möjliggörs
- kategorisering utifrån olika perspektiv möjliggörs
- data lagras på ett sätt som tillåter upprepad analys,
- kommunikation kring resultat underlättas

Målen med 1999 års studier var att beskriva matematik i åttonde klass, att möjliggöra jämförelser över nationsgränser och att skapa ett bibliotek av offentligt utgivna inspelningar. Dessa kan användas i syfte att underlätta nationsöverskridande forskning och diskussion om matematikundervisning. Efter analys av 638 lektioner i 7 länder, beskrivs kortfattat några iakttagelser (COMET, 2003; NCES, 2003):

- I Nederländerna var det vanligare att elever mötte problemuppgifter med förankring i vardagen.
- Japanska lektioner innehöll flera problem med anknytning till begrepp och fakta.
- I Hong Kong-lektioner var en större procentandel av problemen riktade mot formler och procedurer.
- Lektioner i USA och Australien lade minst vikt vid övergångar eller relationer mellan olika matematikområden.
- Uppföljning av tidigare lektioner spelade större roll i USA och i Tjeckien.
- Miniräknare användes under fler lektioner i Nederländerna.

Japanska lärare gav ofta sina elever uppgifter som de tidigare inte stött på och bad eleverna utveckla egna lösningar. När eleverna haft tid att arbeta med uppgiften ett slag bad läraren dem lägga fram och diskutera alternativa lösningar och metoder gemensamt i gruppen. Läraren summerade sedan lektionens matematiskt mest betydelsefulla punkter. Ungefär 2/3 av lektionstiden i Japan ägnades åt självständig problemlösning med i genomsnitt tre uppgifter per lektion. Det gav cirka en kvart åt varje uppgift (se NCES, 2003, figur 3.4, 3.5, 3.6 och 3.8).

Definition av bevis innefattade tämligen informella demonstrationer med någon form av matematiskt resonemang. Just den aspekten var tydlig endast i Japan där 26% av uppgifterna innehöll bevis. Japanska lektioner innehöll fler matematiskt relaterade uppgifter, flera var tematiskt länkade. De innehöll färre repetitioner och uppgifterna hade också högre proceduriell svårighetsgrad än i de andra länderna (se figur 4.1 och 4.6 i NCES rapport från 2003).

Att minska gapet

> *Standards* anger riktningen och utvärderingar ger normer, men det är undervisningen som måste förbättras för att vi ska nå framgång. Många tror att bättre undervisning och lärande följer i de strukturella reformernas spår. Men reformer har enbart begränsad effekt om inte de avsedda förändringarna når klassrummen och stöds av bred och kraftfull kompetensutveckling.
>
> (Gallimore & Stigler, 2003)

Antropologin lär oss att förändringar i klassrum släpar efter. Ett stort hinder är den snäva erfarenhet av undervisningsmetoder lärare haft som elever, innan de påbörjat sin yrkesutövning. Förändringar kräver en rik, bred och validerad yrkesmässig kunskapsgrund, inklusive kunskap om alternativa metoder. De kräver en miljö som både uppmuntrar och stödjer fortlöpande förbättringar av undervisning och lärande se (Gallimore & Stigler, 2003; Hiebert, Gallimore & Stigler, 2002). John Dewey noterade att det mest sorgliga med utbildning är att:

> ... the success of excellent teachers tend to be born and die with them.

I Deweys försöksskola såddes fröet till ett skolbaserat system med engagerade lärare för att bygga professionellt kunnande. Han följdes snart av Judd och Thorndike vilkas syn har format utbildning och forskning om utbildning i USA. Tendensen att söka snabba lösningar har skapat en begravningsplats för goda idéer, dömda att gå under på grund av kravet på snabba resultat. Forskning har alltför liten inverkan när det gäller att förbättra undervisning och lärande i klassrummen. Lärare har inte för vana att rutinmässigt söka efter forskningsresultat som skulle kunna vara till hjälp för att tolka elevers föreställningar.

Lärande kan underlättas av möten med idéer och begrepp på skilda sätt och i skilda kontexter. Lesson Lab föreslår lättillgängliga digitala bibliotek med bandade lektioner kodade på ett sätt som gör det möjligt att hitta varierande teman och angreppssätt. Målet är att lärare ska kunna ha utbyte, diskutera, få egna tankar bekräftade eller motsagda, ibland modifierade. Andra yrkesgrupper, jfr medicin och psykologi, har skapat vägar för kunskapsutbyte genom sk case literature, men inom undervisning har olyckligtvis ännu inget sådant system utvecklats.

Kunskap om undervisning är mest användbar när den representeras av teorier med exempel. Teorierna borgar för att kunskapen höjer sig över ad-hoc nivå. Exempel förankrar teorierna i praktiken. Fyra hinder som försvårar god kompetensutveckling i stor skala är:

1 Brist på kunskapsbas till stöd för lärares lärande.

2 Tradition saknas hos lärare att analysera och lära av den egna praktiken.

3 Brist på tid för gemensamt arbete.

4 Tendensen att söka snabba lösningar.

Det finns program som använder videostudier för att ge lärare möjlighet att lära från *den bästa metoden* genom att studera exempel på effektiv undervisning. Lesson Lab å andra sidan inkluderar olika exempel och lämnar därmed plats för reflektion kring såväl problematiska situationer i klassrummet som framgångsrika tillvägagångssätt. Deras kompetensutvecklingsmodell *Learning from Practice* understryker att förbättrad analys, planering och reflektion tillsammans har bäst potential att utveckla lärares metoder. I kulturen utvecklade rutiner som ger spår i undervisningen kan på så sätt tydligare medvetandegöras, utvärderas och möjligen förändras i ljuset av internationella jämförelser. Analys, planering och reflektion bör inte grundas på ad-hoc-skicklighet utan hellre på disciplinerad användning av undervisningsteorier (Gallimore & Stigler, 2003).

Vid japanska ”Lesson studies” förvandlas praktiskt kunnande till professionellt kunnande. Lärargrupper möts regelbundet för att tillsammans planera, genomföra, utvärdera och förädla lektioner. Förändringar görs på grund av hur specifika problem blir tydliga under lektionens gång. Ofta ber man forskare medverka som rådgivare (Fernandez & Yoshida, 2004) . Grundat på dessa videostudier och *Lesson studies* ställer vi frågan: I vilken grad är det möjligt för våra skolor och lärare att verkligen ta till sig undervisningsmetoder och kompetensutvecklingsmodeller från andra kulturer?

Lesson studies

Ämneskunskaper i matematik är sällan ett problem i Japan, inte ens bland lärare i tidiga skolår. Alltså kan lärarutbildningen koncentreras mera på undervisningsmetodik och yrkesutveckling. Resultatet blir att en högre grad av professionalism förväntas bland lärare jämfört med i andra länder. Samtal kring lärande för både lärare och elever uppmuntras och inlärningssvårigheter uppmärksammas och diskuteras. Mycket energi ägnas åt att göra lektionsplaneringar (Jaworski & Gellert, 2003, s 838)

De japanska lektionsstudierna, Lesson studies, har sin historia på motsvarande låg- och mellanstadiet och sitt ursprung i början av 1900-talet. Starka argument finns för att dessa har stor potential som en slags pågående kompetensutveckling där lärare tillsammans planerar och utvärderar verkliga lektioner. Men, för att dra nytta av en sådan studie måste lärare kunna se med kritiska ögon när de analyserar lektioner.

Fernandez, Cannon och Choksi (2003) har studerat ett försök att introducera Lesson studies i USA. I detta samarbete bidrog japanska lärare med kritiska perspektiv och en konstant uppmärksamhet på ”hur barnens inlärningserfarenheter ordnas och kopplas sinsemellan”. Det var faktiskt så att de allra först förmedlade vikten av att reflektera över elevens totala inlärningserfarenhet, till och med innan de påbörjade planeringen av lektionerna. De förberedde sig med *kursplaneglasögonen på* och med ett öga riktat mot att orkestrera elevers lärande både inom och mellan lektioner.

> Om det finns kunnande som i hög grad är användbart för att lösa dessa problem kanske man bör ägna mer tid att tala om den kunskapen tidigt under lektionen.

Genom att uttrycka sig så här förmedlade läraren vikten av att undersöka vilka tidigare erfarenheter som påverkar elever när de väljer metod och hur det i sin tur påverkar lektionens uppbyggnad. Denne lärares grundval för den föreslagna ordningen hade tydligt sin kärna i hur djup förståelse för begreppsinnehållet i den planerade lektionen skulle uppnås.

> Jag tar alltid reda på vilken problemlösningsmetod majoriteten av eleverna använder. Jag antar att denna metod är vad de lärt sig hittills i sin matematikutbildning.

Den japanske läraren försökte använda lektionen för att *skapa en princip om undervisning* som var generellt applicerbar i hans klassrum och som han tyckte andra lärare borde överväga. De amerikanska lärarna hänvisar sällan till bredare principer eller teorier.

Ytterligare ett perspektiv som de japanska lärarna lyfte fram var att betrakta hela lektionen med elevers ögon. De betonade vikten av att lärare *antar elevperspektiv* för att försöka *förutse elevernas beteende* och med hjälp av denna kunskap kunna avgöra hur deras förståelse bäst ska byggas. Att förutse vissa lösningar på matematiska problem och att förklara hur dessa lösningar skulle kunna användas för att öka elevernas förståelse blev en betydelsefull del i lektionsplaneringen.

Vid implementering av *Lesson studies* i andra länder måste stora utmaningar mötas för att praktiken ska bli meningsfull och kraftfull. För närvarande finns ett sug efter ökad reflektion kring lärares praktik. Sådana reflektioner kräver *utveckling av kritiska förhållningssätt*.

Reflekterande praktiker

Hatton och Smith (1995) hänvisar till Lerman (1994) när de definierar reflektion som

> att utveckla förmågan att skärpa uppmärksamheten kring det som sker i klassrum och samtidigt lägga märke till och minnas avgörande händelser samt "arbeta" med dessa för att nå maximal kunskap om barns lärande och lärarens roll.

Termerna *reflektion* eller *kritisk reflektion* dyker allt oftare upp i beskrivningar av ansatser i lärarutbildning de senaste decennierna. Schön (1983) talar om *reflection-on-action* och *reflection-in-action*. Med reflektion menas oftast tillbakablickar på händelser i syfte att utvärdera effektivitet efter implementeringsförsök.

Schöns *reflection-in-action* kräver samtidig reflektion och direkt agerande, vilket antyder att läraren nått en grad av kompetens som gör henne/honom medveten om vad som sker i så hög grad att omedelbar modifiering av handlingar är möjlig. *Reflection-on-action* och *reflection-in-action* grundas på yrkesmässigt *kunnande*. Den typen av underförstådd kunskap härrör från att skapa och återskapa erfarenheter. Fyra breda strategier som anses gynna lärares reflekterande förmåga är

– etnografiska studier av elever, lärare, klassrum och skolor,

– mikroundervisning och andra handledda erfarenheter från praktik,

– strukturerade planlagda uppgifter,

– aktionsforskning.

Hinder vid utveckling av reflektiv praktik:

– Reflektion associeras vanligen inte med en lärares arbete. Undervisning betraktas ofta som aktivitet till skillnad från reflektion som oftare ses som en akademisk uppgift.

– Utveckling av effektiv reflektion kräver tid och möjligheter. En passande kunskapsgrund utifrån historiskt perspektiv som vägledning för undervisning och lärande i matematik saknas.

– Känslan av sårbarhet som kommer av att lämna ut egna uppfattningar och idéer till andra stödjer behovet av samarbete där lärare kan arbeta tillsammans som *kritiska vänner*.

– En kritisk reflekterande ansats kräver en medveten lärarutbildning där inte bara effektiva metoder tas upp utan också konflikter mellan olika institutioners perspektiv.

Trots alla hinder och trots all uppmärksamhet och försiktighet som måste iakttas på grund av tidigare nämnda kulturella hinder i samband med introduktion av lektionsstudier i USA, är vårt svar på huvudfrågan:

Detta tillvägagångssätt är värt att pröva i skandinavisk miljö genom uppbyggnad av ett videoarkiv med material från klassrumsaktiviteter. Vidare krävs att vi gör det möjligt för lärarsamarbete i grupper som genomför lektionsutveckling lokalt, med videoarkivet som en möjlig utgångspunkt och med universitets- eller högskoleforskare och lärarutbildare som resurspersoner.

Efterskrift 2006

I det japanska klassrummet gavs den tidigare beskrivna uppgiften första lektionen i en sekvens på åtta lektioner, där målet var att arbeta fram till ekvationer och olikheter.

Hösten 2004 gav vi denna uppgift vid början av en kurs i linjär algebra för universitets- och högskolestuderande som redan på gymnasiet hade behandlat ekvationer och olikheter med algebraiska och grafiska metoder. Flera av kursens 49 studenter använde de strategier som vi sett de japanska eleverna använda: 5 använde grafisk metod (jfr pt 4), 18 använde symbolisk metod med ekvationer eller olikheter (jfr pt 3), 11 räknade ner med hjälp av tabell (jfr pt 1), medan 15 inte antog uppgiftens utmaning och inte gav något svar.

Vi fick en tydlig illustration till hur tids-och arbetskrävande det är att passera gränsen mellan aritmetik och algebra, jfr Harper (1980).

Referenser

Bacon, F. (1994). *Novum organon – with other parts of the great instauration.* Översatt och redigerad av P. Urbach & J. Gibson. Illinois: Open Court.

Bekken, O.B. (1984). *Readings from the Hindu Arithmetic and Algebra*. Kristiansand: ADH.

Bekken, O.B. (2000). Algebraens utvikling i kultur- og skoleperspektiv. Fra det numeriske, geometriske og retoriske mot det symbolske. I B.K. Selvik, C. Kirfel & M. Johnsen-Høines (Red), *Matematikk i samfunnsmessig, historisk og kulturelt perspektiv* (s 85 – 104). Bergen: HiB.

Branford, B. (1924). *A study of mathematical education*. Oxford: Oxford University Press.

COMET (2003). *California Online Mathematics Education Times 4*(11). March 2003.

Comenius, J.A. (1975). *Comenius' självbiografi – Comenius about himself.* Stockholm: Universitetsförlaget.

Fernandez, C., Cannon, J. & Chokshi, S. (2003). US – Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education*, *19*, 171 – 185.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Gallimore, R. & Stigler, J.W. (2003). Closing the teaching gap: assisting teachers to adapt to change. I C. Richardson (Red), *Whither assessment?* London: QCA.

Harper, E. (1980). The boundary between arithmetic and algebra. Conceptual understandings in two language systems. *Int. Journal Math. Ed. in Sci. & Techno. 11*, 237 – 243.

Hatton, N. & Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: Towards definition and implementation. *Teaching and Teacher Education*, *11*, 33 – 49.

Hiebert, J., Gallimore, R. & Stigler, J.W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like? and How can we get one? *Educational Researcher*, *31*(5), 3 – 15.

Hiebert, J., Kieran, C., Stigler, J., Wearne, D., Seago, N. & Hood, G. (2003). TIMSS *Video Studies: Explorations of algebra teaching.* Santa Monica: Lesson Lab Inc.

Jaworski, B. & Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice. I A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Red), *Second international handbook of mathematics education* (s 827 – 873). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Klein, F. (1945). *Elementary mathematics – from an advanced standpoint.* New York: Dover.

Lerman, S. (1994). Reflective practice. In B. Jaworski & A. Watson (Red), *Mentoring in mathematics Teaching* (s 52 – 64). London: Falmer Press.

Mosvold, R. (2001). *Det genetiske prinsipp i matematikkdidaktikk*. Kristiansand, HiA.

Mosvold, R. (2003). Genesis principles in mathematics education. I O.B. Bekken, & R. Mosvold (Red), *Study the masters. The Abel-Fauvel conference proceedings* (s 85 – 96). Göteborg: NCM.

NCES (2003). *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington D.C.: US Department of Education. National Center for Educational Statistics.

Poincaré, H. (1889). La logique et l'intuition dans la science mathematique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathematique*, *1*, 157 – 162.

Santagata, R. & Stigler, J.W. (2000). Teaching mathematics: Italian lessons from a cross-cultural perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(3), 191 – 208.

Schubring, G. (1978). *Das genetische prinzip in der mathematik-didaktik*. Bielefeld: Klett-Cotta.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Stigler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: Free Press.

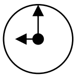
van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra*. Utrecht: CD-Press.

Wilson, S. (2003). *California dreaming: Reforming mathematics education.* New Haven: Yale Univ.

Bilaga

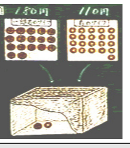
[54 Minute Lesson]

Japan Public Release Lesson 3 Lesson Graph [8th Grade]



4 Minutes

Public Class Work: Setting up the Problem– **The teacher reads the following problem to his class:**



It has been one month since Ichiro's mother entered the hospital. He has decided to give a prayer with his small brother at a local temple every morning so that she will be well soon. There are 18 ten-yen coins in Ichiro's wallet and just 22 five-yen coins in his smaller brother's wallet. They have decided every time to take one coin from each of them and put them in the offertory box and continue the prayer up until either wallet becomes empty. One day after they were done with their prayer, when they looked into each other's wallet the smaller brother's amount of money was bigger than Ichiro's. How many days has it been since they started the praying? That is the problem.

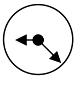
The teacher says, "I think that there are points hard to understand with just the sentences, so I would like to look at the figure and check it. He goes on to simulate the problem by taking coins from each wallet and putting them in the offertory box, asking how much in each wallet and which brother has more.

13 Minutes

Private Class Work: Students work individually on the problem

Midway through, the teacher says to the whole class, "If you found the answer with one method, try finding another method."

As he circulates around the room, he talks with several students about their solution methods and tells them that he is going to have them present their solution methods later on. He says to one student, "please think beforehand why you formulated an equation like this."



24 Minutes

Public Class Work: Students Presenting Solutions to Class

The teacher asks the students to present their solutions in the following order and place a pre-written title over each solution. He asks after each solution is shared, "How many others solved it in the same way?"

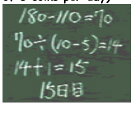
1. **Student one** **(Manipulating actual objects)**
Actually take one coin from each wallet and put it in offertory box until Ichiro's wallet contains less money than the brother's wallet. Or crossing out one coin from each wallet until the same condition is met. Answer: 15th day

2. **Student two**
(Solving it by making a table)

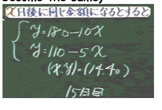
Number of days	1	2	3	-----	14	15	16	17
Amount left	170	160	150	-----	40	30	20	10
Number of days	1	2	3	-----	14	15	16	17
Amount left	105	100	95	-----	40	35	30	25

Answer: 15th day

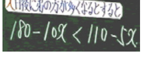
3. **Student three**
(There is a difference of 5 coins per day)



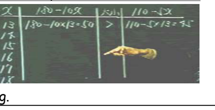
4. **Student four** **(If X is the day when the monetary amounts become the same)**



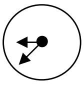
5. **Student five** **(If X is the day when the brother's monetary amount exceeds Ichiro's)**



Task: **Complete the chart and check if the value of x holds true for this inequality. What is the relationship?**



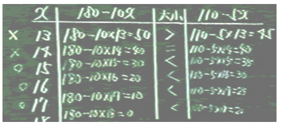
The teacher assigns a task and students work on it individually for six minutes.
The teacher asks a student to write her results on the chalkboard while the other students are still working.



13 Minutes

Public Class Work:

The teacher asks how many students had the same results as the last student.
He notes that x holds true for 15, 16, 17 and 18; the first one was >. The second one was equal (14) which he calls "the standard".



The teacher asks about the 19th day, and a student says Ichiro's wallet becomes empty and at that time they will end it. Students are asked to write the solution on their handouts.

Lärare lär från video

MARIA LUIZA CESTARI, ROSSELLA SANTAGATA & GAIL HOOD

Sedan 1960-talet är det vanligt att utforska teoretiska och metodologiska ramar för att analysera undervisning i klassrumsstudier. Mikroundervisning med stöd av videoinspelningar och socialpsykologiska idéer visar på nya vägar till förståelse av undervisning. På 1980-talet introducerades reflektion kring undervisningsmetoder i lärarutbildning. I artikeln diskuteras olika förhållningssätt som lärare har vid analys och tolkning av inspelade matematiklektioner. Vad väcker deras uppmärksamhet? Hur förhåller de sig till matematikinnehåll, till pedagogiska strategier? I en pilotundersökning fick 14 lärare reflektera över en del av en lektion genom att analysera hur ett problem introducerades. De uppmanades också att studera de möjligheter till lärande eleverna gavs och vilka förändringar de skulle kunna göra för att ytterligare stödja detta. Några lärares reflektioner diskuteras i ljuset av teorier om den reflekterande praktikern.

Introduktion och mål

Den senaste tidens utveckling av digital teknik har fört med sig ökad användning av videoinspelningar i lärarutbildning. De betraktas av lärare och forskare som ett effektivt verktyg för att överföra teoretiska inslag till klassrumspraktik. Trots det ökande intresset finns inte mycket empirisk forskning om effekterna av videoanvändning, om det förbättrar lärares kunnande och praktik och om det ger positiv effekt på elevers lärande.

I artikeln beskrivs en pilotstudie där amerikanska lärare genomförde en utvärderande reflektionsuppgift efter att ha deltagit i en video- och internetbaserad algebrakurs. Lärarna studerade och analyserade ett antal inspelade lektioner som ingår i TIMSS, Third International Mathematics and Science Study (Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth och Jacobs m fl, 2003). Studiens mål var att beskriva resonemang kring undervisning som videoinspelningarna gav upphov till samt det engagemang analysuppgifterna ledde till.

I nästa avsnitt beskrivs den historiska utvecklingen av lärares videobaserade lärande, TIMSS-studierna samt algebrakursen. Därefter följer en analys av lärares svar på en avslutande reflektionsuppgift som fokuserade på hur lärare integrerade matematikinnehållet med egna undervisningsstrategier. I en sammanfattning drar vi slutsatser och diskuterar lärares olika förhållningssätt när de reflekterar över praktik. Slutsatserna visar att lektionsanalyser från olika kulturella kontexter kan ge bättre förståelse av undervisningen.

Lärare lär från video: ett historiskt perspektiv

Användning av videoinspelningar för kompetensutveckling av lärare har sina rötter i 1960-talet. Speciellt stort inflytande hade Banduras och Walters (1963) arbete inom området social inlärning. I boken, *Social Learning and Personality Development*, presenterade författarna två grundläggande mekanismer: modellinlärning och imitation. Denna teoretiska modell införlivades i lärarutbildningsprogrammet på universitetet i Stanford i något som kom att bli en mycket populär ansats betecknad ”mikroundervisning” (Allen, 1966; Allen & Ryan, 1969). Nya studenter måste som en del i sin lärarutbildning ta en kurs i tre steg. Under kursen observerade de en modell av en undervisningssituation där specifika handlag demonstrerades – oftast i videoinspelningar. Därefter fick studenterna prova den nya tekniken med återkoppling till egen framställning.

Ett flertal undersökningar gjordes fram till mitten av 1970-talet kring aspekter av mikroundervisning och dess effekter på lärares utveckling av nya undervisningstekniker (Acheson & Zigler, 1971; Allen & Clarke, 1967; Limbacher, 1971; Ward, 1970). På det hela taget gav dessa stöd för användning av mikroundervisning i lärarutbildning. Denna underlättade förvärvande av instruktionstekniker och krävde mindre tid än mer traditionella metoder. Dessutom gavs tydliga bevis på de positiva effekterna av mikroundervisning på studerandes attityder och lärande. För en genomgång se t ex Turney, Clift, Dunkin och Traill (1973).

Mikroundervisning blev mindre populär när kompetensutvecklingsmetoder som fokuserade ämnesinnehåll och komplexa beteenden kom fram (speglande övergången från behaviorism till kognitivism i psykologiforskning). Ändå har mikroundervisningens grundidé – lärande genom observation av effektiv praktik – varit populär genom 1980- och 1990-talen och används än idag. Carver och Scheiers (1981) ansats (control theory approach) för att förstå mänskligt beteende användes av Gallimore, Dalton och Tharp (1986). De lät lärare möta ny metodik i videoinspelningar och lärarna fick sedan tid på sig att genomföra denna i sina klassrum med återkoppling. Det visade sig att lärarna anpassade de nya metoderna och matchade dem med sitt eget beteende genom självreglering, styrda av en önskan att bete sig likadant. Detta tillvägagångssätt var mest effektivt när skillnaden mellan den nya metoden och lärarens egen var relativt liten.

På senare tid har forskare föreslagit en alternativ metod för kompetensutveckling med stöd av video. Metoden grundar sig på antagandet att undervisning är cyklisk (Ball & Cohen, 1999; Hiebert, Gallimore & Stigler, 2002). Lärare planerar, undervisar och reflekterar över sin praktik i en kontinuerlig cykel. Alla lärare deltar i viss grad i dessa processer. Enligt denna metod har reflektionsfasen stor potential för lärares lärande eftersom den kräver tydligare fokus men ändå är lugnare än genomförandefasen. Reflektionsfasen tillåter också i högre grad att kulturella mönster som undermedvetet styr undervisning blir synliga, utvärderas och förändras. Dessutom kan lärare under reflektionsfasen avgränsa problem och utvärdera alternativ. Denna process påverkar direkt planeringen och, som naturlig konsekvens, undervisningen (Schon, 1983).

Utveckling av analyser av lärares praktik kan ge större möjligheter att med skärpa ”se” lektioners ämnesinnehåll, att urskilja vägar till förståelse för ämnet hos elever, identifiera problematiska situationer, bedöma elevers respons, spåra, diagnostisera och utveckla undervisningsinslag för att möta elevers misstag etc (Berthoff, 1987; Burnaford, Fischer & Hobson, 1996; Cochran-Smith & Lytle, 1993; 1999). Om lärare tillägnar sig stabila metoder för analys av praktik kommer de att bli kunnigare i att integrera innehåll med sin undervisning. De kommer att öka sitt pedagogiska innehållskunnande ”pedagogical content knowledge”. Denna term introducerades av Shulman (1986). Projektet som beskrivs är förankrat i denna ansats. I följande avsnitt sammanfattas TIMSS videostudie och TIMSS algebrakurs presenteras.

TIMSS och algebra

Mellan 1994 och 1995 genomfördes TIMSS, Third International Mathematics and Science Study. Elever från fjärde-, åttonde- och tolfte skolåret från 41 nationer med 30 olika språk deltog. Syftet var att jämföra prestationer i matematik och naturvetenskap. Förutom elevtester resp skolår innehöll studien också analyser av elever, lärare, skolor, kursplaner och undervisning för att bättre kunna förstå de utbildningssammanhang där undervisning och lärande ägde rum. Dessutom genomfördes en omfattande undersökning av videoinspelade matematiklektioner i åttondeklasser i USA, Japan och Tyskland, (Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll & Serrano, 1999). Det var första försöket att samla klassrumsobservationer av nationellt representativa exempel från skolor och klasser.

Japan var det enda landet i TIMSS videoundersökning 1995 som hade förhållandevis höga poäng i matematik i årskurs åtta. Därför fanns en oavsiktlig och omotiverad slutsats att japanskt sätt att undervisa skulle vara nödvändigt för att uppnå goda resultat i matematik (Stigler, Hiebert, Kieran, Wearne, Seago & Hood, 2003). När TIMSS åter genomfördes 1998–1999, gjordes därför en utökad videoundersökning. Den var upplagd för att undersöka detta. Sju länder – Australien, Tjeckien, Hong-Kong SAR (Special Administrative Region), Japan, Nederländerna, Schweiz och USA – deltog i studien som innehöll lektioner i matematik och naturvetenskap. Rapporten om denna studie (Hiebert m fl, 2003), gavs ut tillsammans med 28 lektioner, fyra från vart och ett av de sju deltagande länderna (se www.lessonlab.com).

Kursen *TIMSS Video Studies: Exploration of Algebra Teaching* är baserad på upptäckter och resultat från 1999 års TIMSS. Även om vissa upptäckter är utförliga och komplexa kan några enkla och signifikanta slutsatser dras. Det finns ingen enstaka undervisningsmetod som gör att elever presterar bra i matematik och det finns mycket kvar att lära genom att undersöka olika undervisningsmetoder och söka vägar för att engagera elever i viktigt matematikarbete. Med dessa insikter som grund syftar kursen till att identifiera undervisningsstrategier som hämmar alternativt stärker elevers engagemang i viktiga matematikaktiviteter samt till att reflektera över eget arbete och att lära av och om 1999 års videoundersökning. Kursen utvecklades av Hiebert och Stigler, som ledde TIMSS videostudier, och av deras kolleger. Åtta lektioner från samlingen med videoinspelningar ingår.

Algebrakursens fem komponenter

1 *Introduction* behandlar kursens mål, ger orientering i mjukvaror och handhavande samt en översikt av TIMSS 1995 och 1999.

2 *Initial exploration*, ”Aktiviteter för att bli varm i kläderna”, utforskar inledningar av lektioner från Australien, Tjeckien, Hong Kong och Nederländerna, först för individuell reflektion sedan diskussion i öppet virtuellt forum.

3 *TIMSS 1999 Video Study Up Close* beskriver närmare videostudiens metodologi och viktiga upptäckter som har betydelse för kursen. Eftersom ”Making Connections”-uppgifter, matematiskt utmanande uppgifter som visar på sammanhang, är av stor vikt i kursen ingår två exempel som visar hur ofta denna typ av uppgifter introduceras men inte följs upp i klassrum.

4 *Case 1: Japan*, *Case 2: Hong Kong SAR* och *Case 3: Schwitzerland* är djupstudier som ger deltagare möjlighet att utforska, reflektera över och analysera matematikuppgifter och därtill hörande lektioner. Alla är i liknande format med möjlighet till individuellt arbete och gemensam diskussion.

5 *Reflections tasks*. Uppgifter som låter deltagarna reflektera över vad de lärt sig och hur det har påverkat eller kan påverka deras undervisning.

Kursen är upplagd för att vägleda och uppmuntra deltagare att utforska och noga tänka över innehållet innan de möter expertkommentarer. Den ger deltagaren många möjligheter att själv komma till insikt och kunnande. I den sista delens första uppgift, reflekterar exempelvis kursdeltagarna över hur ett förbisett inlärningstillfälle kan ändras för att stödja avsikten med ett särskilt utmanande problem. I den andra uppgiften använder deltagarna vad de sett i en videoupptagning i den egna undervisningen.

Algebrakursen kan ges on-line, eller i kombination av on-line och träffar. Användning av on-lineversionen underlättas om ledare organiserar en hemsida och modererar ett diskussionsforum. Kursen kan också ges utan ledarstöd.

Fyra pilotundersökningar gjordes när kursen skulle läggas upp. Dessa visade på fyra möjligheter att ge kursen. Första alternativet bestod helt av seminarier med valfritt tillägg av sökningar on-line mellan dessa. I det andra alternativet började och avslutades kursen med träffar men däremellan gjordes arbetet online. I det tredje alternativet gavs kursen helt on-line utan studieledarstöd. Alternativ fyra innebar ledarstött arbete on-line.

När alternativen utvärderats ändrades kursen. Under den första pilotundersökningen berättade flera deltagare vid träffen efter att den japanska fallstudien presenterats , om hur de försökt använda strategier liknande den japanska lärarens . En lärare hade till och med videofilmat sitt försök. Lärarna hade inte uppmanats till detta utan helt enkelt stimulerats av vad de sett. De hade också förvånats av responsen från sina elever. Detta resulterade i att en ny uppgift togs in i reflektionsavsnittet där deltagare fick reflektera över egen undervisning och diskutera erfarenheterna med varandra. I följande avsnitt analyseras tre lärares svar på en reflektionsuppgift från den fjärde pilotundersökningen.

Lärare reflekterar över sin undervisning

14 lärare från olika skolor i USA slutförde den fjärde pilotundersökningen. Efter noggrann läsning av allt material har vi valt ut tre inslag där reflektionerna beskrivs detaljerat. Dessa visar på den utveckling av den egna praktiken som kursmaterialet gav upphov till. Vi har tittat närmare på två aspekter:

– Idéerna de väljer från videoinspelningarna.

– Hur lärarna skapar pedagogiskt innehållskunnande, *pedagogical content knowledge*, genom att överföra vad de ser på inspelade lektioner till reflektion över egna lektioner.

Den analys vi ger är inte fullständig och representerar inte alla möjliga tolkningar av dessa reflektioner. Vårt mål är att fånga den meningsskapande process som lärare går in i när de ombeds koppla sin kunskap från kursen till sin praktik. Enligt Shulman (1986) kräver en undervisningssituation att lärare har innehållsmässig kunskap, pedagogisk kunskap och behärskar integration mellan dessa båda typer av kunnande. Reflektionsuppgiften nedan erbjuder en möjlighet att analysera lärarens försök att få till stånd denna integration. Uppgiften kring reflektion över den egna undervisningen består av tre delar:

1 *Hur förändra lektioner för att höja nivån på elevernas matematiska tänkande?*
Vilka förändringar kan du prova i ditt klassrum för att förbättra kvaliteten i elevernas matematiska tänkande, efter att du reflekterat över vad du lärt dig genom att utforska lektioner i kursen? Ta med de strategier du skulle använda för att behålla graden av komplexitet i givna problem.

2 *Införande av förändringar*
Precisera hur du ska gå tillväga för att genomföra de tänkta förändringarna? Tänk på en förestående lektion – hur skulle du föra in förändringar?

3 *Implementering av förändringar*
Om du har möjlighet, utför de förändringar du beskrev i fråga två i din klass. Beskriv vad som hände. Blev resultatet det förväntade?

Kursdeltagarna ger svar på dessa frågor enskilt on-line. Vi beskriver tre utvalda lärares reflektioner.

Karin

Karin har en BA (Bachelor of Arts) från college med matematik som biämne. Hon har arbetat 28 år i middle school och två år i high school. Hon undervisar nu nionde- och tiondeklasser i algebra och geometri. Hennes svar på fråga 1:

> *Jag funderar över att jag måste konstruera fler uppgifter som låter dem hitta flera ingångar. Använda laborativt material för väsentliga idéer. Ge mer tid för elevpresentationer. Låta saker ta längre tid – inte rusa fram... Jag gissar att jag söker mer tid för djupare förståelse genom att använda intressanta problem. Att ge mer genomtänkt uppmärksamhet kring hur idéer utvecklas snarare än att bara kasta fram dem ... Erkänna hantverket och använda det!*

Svarets reflektiva karaktär syns i Karins inledande mening: ”Jag funderar över ...”. Hennes tankegång visar att hon märker och har förståelse för naturen i det kunnande som eleverna måste skapa: att öka variationen i uppgifternas formulering för att ge öppningar mot olika lösningar, att gå från det konkreta till det abstrakta. Det är viktigt att ge tillräckligt med tid för reflektion och ge utrymme för utveckling av tankeprocessen. Karins uppmärksamhet på olika aspekter av inlärningsprocessen visar att hon är inställd på elevernas behov. Hennes svar på fråga 2 lyder som följer:

> *Jag tittar på olikheter och tänker: Varför inte försöka kopiera den presenterade sekvensen? Se vad som händer? Köra lektionen och se vart det för oss... Jag vet att jag inte har någon tavla med magneter – vad kan jag göra? Jag har funderat på detta länge – önskat. Nu är tid att gå vidare och göra något ... en filttavla eller magnettavla. Kanske kan jag använda overhead med småpengar ... Hmm – jag har kommit bort från vissa saker och behöver påminna mig om deras möjligheter.*

Karin närmar sig den andra frågan på ett pragmatiskt sätt. Hon överväger att använda laborativt material. Men – den reflekterande inställningen kommer åter, denna gång kopplad till ett problem från den japanska lektionen som hon formulerar och bearbetar. Hon tar upp antaganden och tydliga förslag på hur hennes undervisning i klassrummet kan förbättras. Karins svar på fråga 3:

> *Ja, jag har provat förändringarna. Jag vet att jag testar en del av det jag såg på video för att fördjupa min förståelse för vad som sker. Jag försökte använda lektionen om olikheter och blev tagen av hur engagerade eleverna blev – berättelsen fångade verkligen deras uppmärksamhet, redan från början. När jag lät dem jobba med problemet ville de ha bekräftelse på att de gjorde rätt. – Det fick de inte utan jag bara uppmuntrade dem att förklara varför de trodde sig ha ett svar. Jag såg faktiskt de två första metoderna och den med likheter. Den första använde en elev som är mycket lågpresterande. När jag till slut fick fram henne, var de andra eleverna förvånade över hennes svar och gav henne uppmärksamhet. När vi övergick till att arbeta ville hon faktiskt försöka ... Det var intressant för detta hände hela dagen under olika lektioner. Det oväntade var att svaga elever deltog och fick möjlighet att glänsa inför sina kamrater.*

Kommentarerna är direkt länkade till hur problem med olikheter kan lösas i klassrummet. I just denna läsuppgift från den japanska lektionen (se sid 215 i denna bok) finns ett starkt känslomässigt innehåll: moderns sjukdom och religiösa inslag, som barnen använder för att döva sin ängslan. Karin understryker ”berättelsen fångade verkligen deras uppmärksamhet, redan från början”. Hon beskriver också sin lektionsplanering. Hon försöker ändra sin strategi från en traditionell variant där lärare möter elevers svar med utvärdering – ”initiation-response-feedback-pattern” – (Cazden, 1998; Cestari, 1997; Mehan, 1979) till en mer argumenterande metod, där eleverna ombeds förklara sina svar (Lampert, 1990). Här finns ett moment då kognition möter undervisning. Det är viktigt att vara öppen för olika representationer och tillåta olika lösningsmetoder för ett och samma problem.

Avslutningsvis beskriver Karin hur en vanligtvis lågpresterande elev kunde lösa uppgiften. Här kommer historien i kontakt med undervisningen. Enligt Bekken och Mosvold (i denna bok) använder elever i just den japanska lektion som Karin hänvisar till, olika metoder för att lösa uppgiften. Dessa speglar den ordning som lösningsmetoderna kommit fram i matematikens historia. Den japanske läraren i den videofilmade lektionen ser en ökad grad av komplexitet i elevernas lösningar och han tar hänsyn till deras historiska ordning när han kallar fram elever till svarta tavlan för presentation av lösningsförslag. Det som här väcker vår uppmärksamhet är att när olika lösningsmetoder tillåts kan också ”svaga” elever finna vägar att lösa uppgiften. Det tycks underlätta för lågpresterande elever att den historiska utvecklingen inom disciplinen tas i beaktande under lektionens gång. Lärarens sista kommentar är talande: ”*Det oväntade var att de svaga eleverna deltog och fick möjlighet att glänsa inför sina kamrater.*”

Karins analyser av de videoinspelade lektionerna har tydligt stimulerat hennes reflektion över egna undervisningsmetoder. Även om hon har mångårig erfarenhet har hon fått användbara exempel i videoinspelningar och kursmaterial med expertkommentarer och uppgifter att pröva i klassrummet. Hennes svar avslöjar ett särskilt intresse för elevers inlärningsprocess. I sin sista kommentar diskuterar Karin hur alla elever ska omfattas av undervisningen och hur den kan underlättas genom att arbeta med olika lösningsmetoder i samma uppgift. Att vara lyhörd för individuella skillnader i klassrummet är en svår uppgift för de flesta lärare. Att introducera historiska perspektiv kan vara till hjälp för lärare när de ska integrera kunskap om specifika undervisningsstrategier i matematik och elevers förståelse för ämnet.

Patricia

Vår andra deltagare, Patricia, hade matematik som huvudämne på college. Senare tog hon examen i ekonometri. Hon har undervisat sju år i middle school, tre i high school och skrivit läroböcker i matematik. Hennes svar på första frågan:

> *Jag tror att huvudsaken är att försäkra sig om att elever är aktivt engagerade i lärprocessen. Om de bara sitter och lyssnar på hur läraren delar ut information, lär de sig inte, de bara lyssnar. Lektioner behöver utformas för att hjälpa*

> *elever att upptäcka de begrepp och idéer som läraren vill förmedla. Genom att följa en progression i arbetet, börja med kända idéer och sedan handleda elever mot nya begrepp, hjälper läraren dem att lära sig de nya idéerna.*

I det här svaret introduceras två huvudpunkter: vikten av att engagera elever att aktivt delta i klassrumsaktiviteter och planeringen av lektioner för att uppnå detta mål. Patricia reflekterar över effekten av sitt arbete på elevernas inlärningsprocess. Hon diskuterar också tanken att gå från det enkla till det svåra, från det bekanta till konstruktion av nya begrepp. Detta är huvudidéerna Patricia valt ur kursmaterialet. Hennes svar på den andra frågan:

> *Framför allt tror jag att man kan ta nästan vilken lektion som helst och göra den mer elevinriktad genom att ändra ordningen man tänker göra saker. Traditionellt börjar vi med att visa en ny idé för att sedan visa ett exempel och efter det låta dem arbeta med liknande exempel. Börja istället med att låta eleverna lösa ett problem. Försäkra dig om att det är ett problem de kan lösa, eller åtminstone försöka sig på, med de färdigheter de redan har. Använd denna uppgift för att leda dem in i de nya idéerna som du försöker presentera och avsluta med att formalisera.*

Här beskriver Patricia på ett konkret sätt hur elever kan engageras att delta aktivt i sitt lärande. Hon kontrasterar med en lektion där läraren steg för steg visar eleverna hur en uppgift ska lösas. Sedan får eleverna öva med liknande problem. I det här fallet får eleverna från början ett problem att lösa och läraren avslutar lektionen med formalisering av problemet. Denna kommentar speglar de skillnader mellan amerikanska och japanska modeller ”scripts” för matematikundervisning som beskrivits av Stigler och Hiebert (1999). I följande svar reflekterar Patricia över genomförande av förändringar i sitt klassrum:

> *Ja, jag har försökt mig på förändringarna. Jag har haft förmånen att delta i många studier och kurser kring mattereformer i USA. Jag har provat många av dessa strategier tidigare och funnit dem mycket framgångsrika. Mina undervisningsmetoder har förändrats dramatiskt som en följd av detta.*

Patricia anser att förslagen i kursen speglar amerikanska undervisningsreformer i matematik. Patricia är helt klart aktivt engagerad i att tillämpa ”reformed teaching” i sitt klassrum. Att delta i kursen hjälper henne förstärka uppfattningar hon redan har och ger ytterligare exempel på praktik hon finner effektiv.

Liv

Den tredje deltagaren, Liv, har examen från college i matematik och en BA i Education. Hon har arbetat i skolår 8 - 12 i 14 år. Hennes svar på den första frågan:

> *Generellt sett tror jag att jag behöver jobba med organisation av och inriktning på mina lektioner. Alltför ofta hamnar jag i ett sidospår eller brister i fokus på huvudbegrepp. Jag tror jag försöker klämma in för mycket under en lektion och följer med strömmen lite för ofta.*

Närvaroproblem på min skola gör mig frustrerad och gör att jag ständigt måste stötta elever att komma ikapp. Dessa, som jag tycker ständiga avbrott, är en del av vad jag måste hantera under en lektion. Videoinspelningarna verkar visa en mycket lugnare, tydligare fokuserad genomgång än mina typiska lektioner. Så ... strategier ... hmmmm.

1 *Formulera det viktigaste ämnesinnehållet för varje lektion.*
2 *Sammanfatta och reflektera över det som gåtts igenom vid lektionens slut.*
3 *Följ spåret, undvik att komma in på stickspår bort från det aktuella ämnesinnehållet.*

Liv är framför allt angelägen om att hålla fokus på lektionens specifika ämnesinnehåll. Hon inser att detta är något hon behöver jobba med, och hon beskriver sin plan detaljerat. I början av varje lektion ska syftet formuleras tydligt. Hon ska sammanfatta det som behandlats vid lektionens slut och hon ska försöka att fokusera på det valda innehållet. Det är intressant att observera hur Liv kan anpassa det hon lärt sig på kursen med syftet att göra den egna undervisningen meningsfull. I svaret på fråga två beskriver Liv hur hon genomfört sin plan:

Morgondagens lektion handlar om att pricka in data och se hur diagram kan användas för förutsägelser. Vi ska låta ett födelsedagsljus brinna ner en bit när det står på en våg och bestämma ljusets vikt när den minskar över tid. Jag ska försöka göra tydligt att vi gör det här diagrammet över sambandet just för att vi ska kunna hitta svaret på frågan "Hur lång tid tar det för ljuset att brinna ner?" Tidigare tror jag att jag fastnade i metoden och tappade fokus på varför. Jag såg möjligheten att använda diagrammet för att anpassa en linje så nära punkterna som möjligt och sedan använda linjen för att göra en förutsägelse. Jag ska försöka understryka att lektionens syfte är att se hur en matematisk modell kan användas och motstå lusten att ställa upp en ekvation som beskriver sambandet så bra som möjligt eftersom jag inte tror att eleverna är riktigt redo för det ännu. Jag använder en genomtänkt planering men behöver lite större tilltro till dess genomslagskraft. Dessutom – att se videoinspelningarna, i synnerhet den schweiziska, har fått mig att tro att introduktionen av variabler gick för snabbt. Jag ska återvända till det begreppet vid ett senare tillfälle och ta algebrabrickorna, som vi redan använder mer, så som den schweiziske läraren gjorde. Om inte annat kan det vara ett sätt att hjälpa eleverna ur förvirringen över skillnaden mellan 2x och x i kvadrat. Jag ska repetera innehåll i de lektioner jag misstänker att jag inte varit tillräckligt koncentrerad eller tydlig.

Detta svar visar på två viktiga frågor. Liv reflekterar över hur viktigt det är att få eleverna att förstå syftet med den föreslagna aktiviteten innan de försöker bemästra procedurerna. I bakgrunden finns en analys av den schweiziska lektionen, som stimulerar till jämförelse mellan Livs lektioner och utveckling av mer effektiva undervisningsstrategier för introduktion av den anpassade linjens ekvation. Det andra som upptar Livs tankar är hur begreppet variabel ska tas upp.

Åter reflekterar hon över elevernas behov av mer tid för att fullt ut kunna förstå matematiska begrepp.

> *Ja, jag har testat förändringarna. Jag har försökt fokusera på lektionens huvudmål, som var att använda ett diagram för att göra en förutsägelse. Jag försökte också planera lektionen bättre och göra den mer sammanhängande. Som jag sa i mitt förra svar, om det finns en sak jag skulle vilja anamma från lektionen vi såg skulle det vara lektionens organisation och klara fokus. Jag tror att det hjälpte att tänka på detta idag när jag försökte presentera insamling och inprickning av data för att kunna göra en linjär modell.*
>
> *Jag ändrade min ledning av den här lektionen även för att öka min egen koncentration. Tidigare har jag låtit flera olika grupper samla egna data. Om man bara ser till logistiken blev lektionen mer fragmentarisk. Denna gång lät jag istället eleverna enbart samla en mängd med data. Jag lät inte eleverna kämpa lika länge med vägning och omvandling av enheter som krävs för att kunna pricka in data effektivt. Min tanke var att jag behövde koncentrera mig på huvudidén och inte låta andra begrepp eller svårigheter (även om det var matematiska begrepp vi gått igenom) störa huvudspåret. Så jag hjälpte till med de små stegen och försökte guida eleverna vidare mot huvudmålet.*
>
> *I morgon när diagrammen är färdiga och uppgiften lämnas in får jag veta om fler av mina elever fått rätsida på processen. Men det var också så, att när vi genomförde experimentet, kände jag att processen var mindre förvirrande för eleverna. På det hela taget, fokus på huvudmålet fick allt att gå lite smidigare.*

Liv beskriver i detalj vad som hände i klassrummet. Efter analysen av videoinspelningen och reflektioner över vad som skulle kunna ändras har Liv fortsatt och gjort förändringarna för att nu analysera sin egen undervisning. Att fokusera på huvudmålet för vad eleverna skulle lära sig och låta dem samla samma mängd data underlättade hennes uppgift. Hennes uppmärksamhet på elevernas meningsskapande process syns också tydligt. För att kunna undervisa är det nödvändigt att förstå om elever lär sig. Uppmärksamhet på elevers förståelse är en nödvändig förutsättning för att förvärva pedagogiskt innehållskunnande.

Avslutande kommentarer

Två aspekter framträdde i analysen av lärarnas svar på reflektionsuppgiften:

1. Reflektioner riktades mot ett brett spektrum av ämnen som rör undervisningens vardagspraktik.
2. Matematiskt innehåll, undervisningsstrategier och elevers lärande integrerades i lärarnas genomförda arbete.

Det verkar faktiskt som att lärare valde mellan tre perspektiv när de funderade över egen praktik. Några gånger är reflektionerna grundade på *lektionsanalyser*. Lärare beskriver och reflekterar över undervisning som den utvecklas i egna klassrum, samt de sätt eleverna tar sig an specifika matematiska uppgifter.

Andra gånger görs *lektionsanalyser.* Aktiviteter de själva föreslagit och infört i sina klassrum jämförs med vad de observerat på videoinspelningar. Studier av lärare i andra länder som tar itu med innehåll som också ingår i den amerikanska skolmatematiken stimulerar till jämförelser.

Ett tredje förhållningssätt innebär att lärare tar ett steg tillbaka och antar ett *analyserande perspektiv* liknande det som forskare har när de analyserar undervisningsmetoder. Detta perspektiv har potential för att ge utgångspunkter för att styra och utvärdera egen undervisning och stimulera till alternativa undervisningsaktiviteter. Förhållningssättet öppnar också för reflektion över undervisning och lärande i socialt olika kontexter, som till exempel klassrum i andra kulturer.

Videoinspelningar har använts allmänt i lärarutbildning sedan den första mikroundervisningskliniken i slutet av 1960-talet. Det som har utmärkt olika tillvägagångssätt är relationen mellan subjekt och objekt, mellan lärare och video. Ansatsen som föreslås i detta utforskande arbete speglar ett försök att utveckla analytiska verktyg för lärare som de sedan kan använda för att förbättra sin praktik. Men många frågor är obesvarade. Vi behöver bl a utveckla effektiva riktlinjer till stöd för lärares analys och bättre förståelse för de olika behov som lärare har beroende på olika erfarenhet och kunnande. Vi behöver också studera hur lärares analytiska förmåga påverkar deras undervisning och elevernas lärande.

Referenser

Acheson, K.A. & Zigler, C.J. (1971). *A comparison of two teacher training programs in higher cognitive questioning.* Far West Laboratory for Educational Research and Development, Teacher Education Division Publication Series.

Allen, D.W. (1966). A new design for teacher education: The teacher intern program at Stanford University. *The Journal of Teacher Education*, *17*(3), 296 – 300.

Allen, D.W. & Clark, R.J. (1967). Microteaching: Its rationale. *The High School Journal*, *51*, 75–79.

Allen, D.W. & Ryan, K. (1969). *Microteaching.* Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Ball, D. & Cohen, D.K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional development. I G. Sykes & L. Darling-Hammond (Red), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (s 3–32). San Francisco: Jossey Bass.

Bandura, A. & Walters, R.H. (1963). *Social learning and personality development.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Bekken, O.B. & Mosvold, R. (2006). *Reflektioner kring en videostudie.* (I denna bok.)

Berthoff, A.E. (1987). The teacher as researcher. I D. Goswami & P. Stillman (Red), *Reclaiming the classroom: Teacher research as an agency for change* (s 28–39). Upper Montclair, NJ: Boynton Cook. 501 Towards Learner Centred Teaching.

Burnaford, G., Fischer, J. & Hobson, D. (Red). (1996). *Teachers doing research.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carver, C.S. & Scheier, M.F. (1981). *Attention and self-regulation: A control-theory approach to human behavior.* New York: Springer-Verlag.

Cazden, C. (1988). *Classroom discourse: The language of teaching and learning.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Cestari, M.L. (1997). *Communication in mathematics classrooms: A dialogical approach*. Opublicerad doktorsavhandling. Oslo: Universitetet i Oslo.

Cochran-Smith, M. & Lytle, S.L. (Red). (1993). *Inside/outside: Teacher research and knowledge.* New York: Teachers College Press.

Cochran-Smith, M. & Lytle, S.L. (1999). The teacher researcher movement: A decade later. *Educational Researcher, 28* (7), 15 – 25.

Gallimore, R., Dalton, S. & Tharp, R.G. (1986). Self-regulation and interactive teaching: The impact of teaching conditions on teachers' cognitive activity. *Elementary School Journal*, *86* (5), 613 – 631.

Hiebert, J., Gallimore, R. & Stigler, J.W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher, 31* (5), 3 – 15.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A.M., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E.A., Etterbeek, W., Manaster, C. & Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study. NCES 2003- 013.* Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*, 29 – 63.

Limbacher, P.C. (1971). *A study of the effects of microteaching experiences upon the classroom behavior of social studies student teachers.* Bidrag presenterat vid American Education Research Association, New York.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Schon, D.A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York: Basic Books.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4 – 14.

Stigler, J.W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S. & Serrano, A. (1999). *The TIMSS videotape classroom study: Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States. NCES 1999- 074.* Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Stigler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: Free Press.

Stigler, J.W., Hiebert, J., Kieran, C., Wearne, D., Seago, N. & Hood, G. (2003). *TIMSS video studies: Exploration of algebra teaching*, [Online course]. Santa Monica, CA: LessonLab Inc. 502 International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.

Turney, C., Clift, J.C., Dunkin, M.J. & Traill, R.D. (1973). *Microteaching. Research, theory, & practice.* Sydney: Sydney University Press.

Ward, B.E. (1970). *A survey of microteaching in NCATE-accredited secondary education programs.* (Research and Development Memorandum No. 70). Stanford Center for Research and Development in Teaching, Palo Alto, CA: Stanford University.

Hur blir man en duktig matematiklärare?

INGVILL M. STEDØY

Här rapporteras en studie som ingår i ett utvecklingsprojekt med syfte att förändra klassrumspraktiken mot mer elevaktiva arbetssätt än som har varit vanligt i norska klassrum. Vi utgår från en beskrivning av "undervisning av hög kvalitet" för att kunna identifiera hur lärarrollen förändras med tiden. Två klasslärare, som undervisade i årskurs 3 när projektet började, deltog i aktionsforskningen vars mål var att kartlägga under vilka förhållanden en förändring i lärares roller och metoder uppstår, när lärare och forskare samverkar. Genom fortlöpande planering, genomförande och reflektion över olika undervisnings- och inlärningsaktiviteter, skedde en förändring. Steg för steg blev lärarna mer professionella i att av sina klasser skapa en grupp med gemensamma intressen, värderingar och språk kring matematik, att använda icke-rutinuppgifter och problem, att använda material som passade närmiljön och elevernas intressen samt att överföra elevernas idéer till relevant matematik enligt kursplanen. Lärarna utvecklade inte bara sin egen undervisning, utan de spred även idéer och filosofin bakom förändringen i lärarrollen och i praxis till andra lärare.

För att implementera undervisnings- och inlärningsmetoder som bygger på ett konstruktivistiskt synsätt på matematiklärande i norska klassrum har vi under de senaste åren arbetat med olika modeller. Inom matematikdidaktik tycks det idag finnas internationell enighet om att den som lär behöver vara aktivt involverad i sin egen lärandeprocess och att det är lärarens roll att uppmuntra varje enskild elev att ta aktiv del i klassen (Mouwitz, 2001). Det verkar också finnas viss enighet om vilka kriterier som matematikläraren ska uppfylla: att uppmuntra samarbete och diskussion, att förvänta sig och träna eleverna att förklara sina tankar, att uppmuntra dem att experimentera med olika angreppssätt vid problemlösning och att skapa en miljö som främjar denna typ av aktiviteter (NCTM, 2000). Se även de nationella kursplanerna i de nordiska länderna.

Av detta följer att läraren måste ha djup förståelse för den matematik som undervisningen gäller, en förståelse för vilka svårigheter elever i allmänhet har när de försöker förstå matematik på en given nivå, en god kunskap om hur matematiska idéer kan presenteras för elever på olika sätt och en stark övertygelse att alla barn kan lära sig matematik. Läraren måste också ha i åtanke att elever lär på olika sätt och att det därför krävs att matematiska begrepp och teman presenteras på varierande sätt. För att kunna uppfylla alla dessa krav behöver lärare god tillgång till sådana hjälpmedel som kan behövas i en undervisnings- eller inlärningssituation.

Under ett år, 1996 – 1997, auskulterade jag hos en erfaren lärare i USA under dennes matematiklektioner. Denne lärare kan beskrivas som professionell och framgångsrik enligt ovan nämnda kriterier. Efter att ha analyserat lärarens sätt att arbeta var mina funderingar:

a Kan denna högkvalitativa undervisning (Glenn Commission, 2000. Glennkommissionens rapport *Before it's too late*) läras av lärare som i åratal har undervisat i matematik på mer ”traditionellt” sätt, eller är det något man ”föds med”? Om det är möjligt att lära sig sådan undervisning, hur kan det gå till?

b Om sådan undervisning kan läras, hur kan vi finna modeller för att förverkliga dessa metoder i stor skala i norska klassrum?

c I vilken omfattning kan utveckling och spridning av undervisningsmaterial av hög kvalitet påskynda förverkligandet av sådan undervisning?

Glennkommissionens rapport fastslog att undervisning av hög kvalitet kan läras och förfinas över tid (s 21), och att ”it can only be learned through training, mentoring, collaboration with peers, and practice”. Bland ställningstagandena i rapporten citerar vi ett som i denna studie kommer att användas som ett kriterium på högkvalitativ undervisning:

> It has the respect for students as persons, it corrects without squelching[1], it builds upon strength rather than trying to stamp weaknesses.

I Clarke (1997) återfinns en begreppslig struktur sammanfattad i nyckelkomponenter i lärarrollen under två rubriker: vad läraren gör, och hans/hennes uppfattning om undervisning och lärande i matematik (se tabell på nästa sida). Jag kommer att använda denna struktur som ett verktyg för att identifiera ”undervisning av hög kvalitet” i mitt material. Huvuddelen av denna artikel är en beskrivning och analys av ett projekt i en norsk skola där målet var att förändra lärarnas praktik till undervisning av hög kvalitet, så som den definierats tidigare.

[1] squelch = förkasta, tillintetgöra

Komponenter i lärarrollen när undervisningen utvecklats samt tillhörande uppfattningar om undervisning och inlärning av matematik

	Komponenter i rollen (Vad läraren gör)	Tillhörande uppfattningar om undervisning och inlärning i matematik
1	Användning av icke-rutinproblem som startpunkt och fokus för undervisning som inte presenterar en lösningsprocedur.	Elever kan lösa icke-rutinproblem utan att först få undervisning om proceduren.
2	Anpassning av material och undervisning till närmiljön och till lärarens kunskap om elevernas intressen och behov.	Matematik måste studeras i naturliga sammanhang som är meningsfulla och relevanta för eleverna, och inkludera deras språk, kultur och vardagsliv.
3	Användning av olika arbetsformer i klassrummet (individuellt, smågrupp, helklass).	Olikheter i matematikuppgifter och individers olika inlärningsstilar kräver variation av arbetsformer.
4	Utveckling av en grupp med gemensamma intressen, värderingar och språk när det rör matematik med läraren som ”medspelare” som sätter värde på och bygger på elevers lösningar och metoder.	En atmosfär med hypoteser och motiveringar av matematiska idéer förbättrar lärandet. Lärare bör vara öppna för hur de själva kämpar med matematiska problem. Elevers lösningar och metoder utgör basen för diskussion om problem.
5	Identifiering av och fokus på stora idéer i matematik.	Viktiga matematiska idéer är inte begränsade till specifika procedurer inom isolerade områden. Matematik ses snarare som en integrerad helhet, där problemlösningsprocesser, resonemang och kommunikation är centrala.
6	Användning av informella utvärderingsmetoder som grund för beslut om undervisningen.	Att observera och lyssna på eleverna ger ett ”fönster” in till deras tänkande vilket kan användas för att planera fortsatt undervisning.

(Clarke, 1997, s 280)

Projektet skulle kunna kallas analytiskt utvecklingsarbete, men hade karaktären av ett aktionsforskningsprojekt. Samarbetet mellan en forskare och två klasslärare ledde till att Glennkommisionens första ställningstagande (2000, s 21) som hävdar att högkvalitativ undervisning kan läras och förfinas över tid, kunde bekräftas. Jag kommer att avsluta med en kort beskrivning av hur de modeller och metoder för matematikundervisning som utvecklades under projektet spreds från de två lärarna som var engagerade i projektet från början till de flesta lärarna på skolan, och senare till lärare på andra skolor.

Projektet

Syftet med detta projekt har varit att pröva olika sätt att få ett positivt svar på fråga a: Kan lärare som i åratal har undervisat på "traditionellt" sätt, lära sig att undervisa på ett högkvalitativt sätt?

Ett sätt var att förse lärarna med läroböcker och en lärarhandledning. Ett år användes till att skriva läroböcker för elever i årskurs tre och fyra (Holden & Nilssen, 1998; 1999), baserade på de idéer och uppfattningar om undervisning och lärande som jag beskrivit ovan och med användning av erfarenheter och rön från studien i USA (Holden, 1998; 2001). Böckerna skrevs för att stödja och förstärka elevers lärande genom ett elevaktivt och undersökande förhållningssätt till matematiklärande, där aktiviteter *utan* användning av läroboken och som eleverna gjorde *innan* boken användes var väsentliga för att förbereda dem för de utmaningar de skulle möta i läroboken. Böckerna skrevs för att stämma överens med de mål som formulerats i kursplanen i Norge som gällde från 1997. Denna kursplan byggde starkt på konstruktivistiska idéer om undervisning och lärande.

Det var viktigt att hitta lärare som var villiga att arbeta tillsammans med en forskare, att planera lektioner, pröva ut dem i sina klasser och efteråt diskutera och analysera vad som hände i klassrummet. Diskussionen skulle också inkludera vilka matematiska idéer som togs upp och fokuserades under lektionerna. Dessa idéer stöds av Kilpatrick, Swafford och Findell (2001, s 372) i *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*.

> Knowledge of instructional practice: includes knowledge of curriculum, knowledge of tasks and tools for teaching important mathematical ideas, knowledge of how to design and manage classroom discourse, and knowledge of classroom norms that support the development of mathematical proficiency. Teachers need to do as well as to know ... understanding norms that support productive classroom activity is different from being able to develop and use such norms with a diverse class.

Erfarenheter från projektet skulle användas för att finna modeller för att sprida idéerna för att få till stånd en förändring av matematikundervisning i större skala.

Projektet varade i fem år, tills eleverna lämnade skolan för att börja i årskurs 8. I Norge går barnen i en skola från årskurs 1 till årskurs 7, och flyttar sedan till en annan skola för årskurs 8 till 10. Dessa tio år utgör de obligatoriska skolåren. Från årskurs 5 till årskurs 7 hade klasserna i projektet läroböcker som inte var utvecklade speciellt för projektet, men lärarna använde också egna idéer och utvecklade eget material tillsammans med forskaren och andra kollegor.

De omgivande ramarna

Två lärare, Anne-Gunn Svorkmo och Arne Gravanes, samarbetade i projektet. För att nå framgång med projekt som detta är det viktigt att skapa en anda av jämlikhet och respekt mellan lärarna och forskaren. Vi tre bildade en grupp med olika bakgrund och erfarenheter, och tillsammans ville vi utveckla undervisning av hög kvalitet i de två klasser där lärarna undervisade. Det två lärarna är erfarna och har vad vi kan kalla klasslärarutbildning. Detta innebär att de har gått en fyraårig allmän lärarutbildning. Efter en sådan utbildning är man i Norge behörig att undervisa i alla ämnen från årskurs 1 till årskurs 10, hela vägen genom det obligatoriska skolväsendet. Utbildningen innehåller ett halvårs studier i matematik/matematikdidaktik. Anne-Gunn hade läst en extrakurs i statistik. De hade båda undervisat på *ungdomstrinn*, elever i åldrarna 13 – 15 år, innan de kom till *småskole*- och *mellomtrinn*.

När projektet startade 1998 gick eleverna i årskurs 3 (8 år gamla). Genom en skolreform 1997 som bl a innebar tidigare skolstart, började dessa elever direkt i årskurs 2, så detta var deras andra skolår. Lärarna följde sina elever hela vägen genom småskole- och mellomtrinn, vilket är det normala i Norge. Skolan hade 280 elever och 40 lärare. Det var en ny och ”modern” skola, där de olika klasserna befann sig i en ”halvöppen” miljö, bara hyllor och hörnor separerade rummen. Det fanns inga innerväggar och inga klassrumsdörrar. Detta var en utmaning när klasserna arbetade med olika ämnen, men gav samtidigt goda möjligheter att ha gemensamma projekt där eleverna kunde arbeta i grupper oberoende av vilken klass de gick i. Varje klass hade ett eget ”samlingshörn” där de vanligtvis samlades på morgonen för att tala om vad dagens uppgifter handlade om. Där fanns skrivtavla, overhead och konkret material att tillgå. Samlingshörnet var också en perfekt mötesplats för matematiska diskussioner och utbyte av idéer (komponent 3, 4 och 5 i Clarkes struktur ovan).

I Anne-Gunns klass gick 12 flickor och 8 pojkar, och i Arnes klass 12 flickor och 9 pojkar. De två klasserna var typiska norska klasser i flera avseenden. Två barn i varje klass hade ett annat språk än norska som modersmål, det fanns barn med inlärningssvårigheter och stökiga barn, men också barn som låg före de andra i matematik liksom i andra ämnen. Målet var att konstruera uppgifter och aktiviteter som kunde utmana alla elever på deras respektive förståelsenivå.

Norska småskole- och mellomtrinnlärare ansvarar för alla ämnen i klassen. Det innebär att de kan vara flexibla beträffande när de ska undervisa matematik. De kan också bestämma sig för att undervisa i matematik hela dagen om det är nödvändigt, och det gör de ofta när eleverna arbetar med större projekt. Den nationella kursplanen anger att större delen av tiden i årskurserna 1 till 4 ska användas för ämnesövergripande temastudier och projektarbete. I årskurs 3 är eleverna i skolan från 08.30 till 12.00 varje dag. I årskurs 4 är de kvar till 13.30 två gånger i veckan. En gång i veckan tillbringar klassen hela skoldagen utomhus.

Samarbetet mellan lärare och forskare

Innan vi påbörjade vårt projekt hade vi möten där vi diskuterade projektets syften. Vi kom överens om att ett syfte skulle vara att hitta olika infallsvinklar på matematik. Dessa skulle kunna engagera eleverna till att aktivt konstruera sitt eget matematikkunnande, uppmuntra dem att uttrycka sitt matematiska tänkande och utbyta idéer med varandra. Lärarna ville förbättra sin egen undervisning: lära sig att inspirera eleverna, vara goda lyssnare, ta barnens bidrag på allvar, ha höga förväntningar, möta varje barn med entusiasm och uppmuntra dem i deras inlärningsprocess. De ville också lära sig att vara kreativa och hitta matematik i elevernas liv, ur deras erfarenheter och perspektiv. De ville hitta uppgifter och aktiviteter som samtidigt som de var roliga för eleverna skulle ge rika möjligheter att lära sig matematik i enlighet med den nationella kursplanen. Ett syfte var också att lärarna i ett brett perspektiv skulle bli medvetna om betydelsen av den matematik som barnen skulle lära sig i tredje årskursen, så att kopplingen till innehållet i kursplaner för högre årskurser skulle bli tydlig för dem. De skulle också bli medvetna om hur deras frågor och fokus kunde bygga upp begreppslig förståelse av väsentlig matematik hos eleverna på detta tidiga stadium. Detta stämmer mycket väl med Glennkommissionens ställningstagande och med den struktur som Clarke formulerat i tabellen ovan. I Kilpatrick m fl (2001, s 381) påpekas att ”many in-service workshops focus almost entirely on activities or methods of teaching and less often attempt to help teachers develop their own conceptual understanding of the underlying mathematical ideas”.

Under det första året träffades vi tre en timme varje vecka. Vi planerade nya lektioner och diskuterade de matematiska idéer och det innehåll som barnen hade arbetat med under föregående veckas lektioner. Allt som allt hade vi ungefär trettio planerade möten, utöver informella samtal efter lektionerna. Eleverna hade i genomsnitt tre matematiklektioner (60 till 90 minuter) varje vecka. I början föreslog jag hur lärobokens teman skulle angripas, vilka slags aktiviteter som vore roliga att genomföra och hur eleverna skulle förberedas för lärobokens utmaningar. Lärarna fick laborativt material, eleverna gjorde sitt eget material och vi samlade material under utomhusaktiviteter. En idé som Anne-Gunn framförde var att låta varje elev tillverka sin egen meterlinjal i träslöjden. De mätte och delade in sina metrar i exakt tio decimeter och varje decimeter i exakt tio centimeter. Några av dem räknade och några beräknade att det var 100 centimeter på en meter. Linjalen användes för att uppskatta och kontrollera längden på saker i klassrummet, och eleverna blev mycket duktiga på att uppskatta längder upp till fem meter. För dem verkade det naturligt att benämna en längd på t ex 143 cm som 1 meter, 4 decimeter och 3 centimeter. Kopplingen till decimaltal med tiotal och hundratal blev tydlig för lärarna, och de ville använda dessa erfarenheter när de senare började arbeta med decimaler.

Jag var tillsammans med lärarna och deras elever varje matematiklektion, som observatör, som assistent som engagerade sig i elevernas grupparbete, och ibland som lärare med de ”riktiga” lärarna som observatörer. Detta visade sig vara viktigt för att göra lärarna medvetna om möjligheter i elevernas bidrag. Genom att observera min undervisning och fokusera på mitt sätt att arbeta med elevernas matematiska idéer lärde de sig att ta risker och att följa upp elevernas spontana reaktioner. Detta dokumenterades senare i observationerna av deras undervisning och vi diskuterade det på våra veckomöten. Fältanteckningar gjordes under alla lektioner. Eleverna såg mig bara som en extra lärare.

Barnen lärde sig gradvis hur de skulle uttrycka sitt eget tänkande. De uppmuntrades av lärarna att göra detta, och lärarna blev mer och mer medvetna om vilken betydelse det hade hur de uppmuntrade sina elever och hur de reagerade på deras idéer. Lärarna lärde sig att ge respons på ett sätt som fick barnen att känna att lärarna uppskattade deras tänkande. Läraren ställde inte frågor för att kontrollera eleverna, utan för att de var genuint intresserade av elevernas tankeprocesser och vilken slags matematik de hade upptäckt. Lärarna lärde sig att visa entusiasm inför elevernas ”berättelser”, idéer och förklaringar, och att vägleda dem mot relevant matematiskt sammanhang.

Dessa tecken på undervisning av hög kvalitet utvecklades, och lärarna blev medvetna om dem vid våra diskussioner efter lektionerna. Vi använde specifika exempel från lektionen och diskuterade hur lärarnas respons till eleverna skulle kunna förbättras för att elevernas matematiska tänkande skulle uppmuntras.

För att få tillgång till alla elevers tänkande och reflektioner introducerade Arne en ”brevbok”, där läraren och eleven kunde ställa frågor och ge svar till varandra. Läraren kunde ställa frågor för att få veta i vilken utsträckning eleven hade förstått ett visst problem eller begrepp. Vi ger här några exempel från ett ”samtal” i brevboken mellan läraren Arne och eleven Janne. De hade arbetat med multiplikation, och eleverna hade uttryckt med teckningar och symboler hur de kunde placera 24 muffins på en bricka.

Arne: *Hei Janne. Kan du si meg hva multiplikasjon er?*
Janne: *Multiplikasjion er det samme som å gjøre pluss.*

För att få veta om Janne såg sambandet mellan addition och multiplikation skrev Arne tillbaka:

Arne: *Du har på en måte rett. Kan du si hvilket pluss-stykke* 5×3 *er det samme som?*
Janne: *Hei, Arne!* $5+5+5=15$

Efter detta diskuterade vi huruvida Janne skulle mena att det var någon skillnad mellan 5×3 och 3×5. Var det viktigt ur matematisk synvinkel om eleven såg det ena eller det andra som fem treor eller tre femmor? Hur skulle detta påverka deras algebra senare? Vi bestämde att arbeta med klassen och genom att använda olika slags material låta dem få erfarenheter av och diskutera kommutativa lagen för multiplikation. Lärarna blev medvetna om betydelsen av sin egen begreppsliga förståelse och djupare kunskaper i matematik.

Resultat

I februari under studiens första år lät vi eleverna skapa ett matematiktivoli (se slutet av denna artikel). Först visade vi eleverna vad ett sådant skulle kunna vara. Därefter planerade och konstruerade eleverna sitt eget matematiktivoli med sakkunnig handledning från lärarna och mig. Vid det här laget stod det klart att lärarna hade tagit ett väldigt stort steg mot att bli den sorts lärare som vi strävade mot. De valde noggrant ut idéer från eleverna. Dessa var på samma gång matematiskt utmanande, stämde med kursplanen och hade fokus som passade perfekt med vad som hade skett dittills och med vad som skulle komma senare i undervisningen. Eleverna ville ha en fiskdamm på sitt matematiktivoli. Detta var en aktivitet som innehöll en mängd matematiska utmaningar både under tillverkningen och senare när eleverna fiskade. ”Fiskarna” var noggrant utformade för att symbolisera tresiffriga tal, med en färgkod för 100, 10 och 1, så denna aktivitet skulle utmana elevernas begreppsliga förståelse av positionssystemet. Genom att observera barnen medan de arbetade med att välja ut material till ”fiskarna” och när de sedan bestämde värdet av den fisk de fångat skulle lärarna få information om nivån på barnens förståelse.

Nu stod lärarna i begrepp att uppfylla komponent 2 i Clarkes struktur:

> Anpassning av material och undervisning till närmiljön och till lärarens kunskap om elevernas intressen och behov.

Motsvarande läraruppfattning är:

> Matematik måste studeras i naturliga sammanhang som är meningsfulla och relevanta för eleverna, och inkludera deras språk, kultur och vardagsliv.

Efter detta projekt var en av Arnes reflektioner:

> *Før var matematikktimene de stilleste timene. Nå er det de med mest bråk. Men det er kreativt bråk!*

I efterhand kunde jag se att Matematiktivolit var vändpunkten i lärarnas professionella utveckling. Oftare och oftare kom idéerna från lärarna i stället för från mig, och våra diskussioner fokuserades på att identifiera den matematiska potentialen i olika aktiviteter och hur elever skulle kunna utmanas på sina olika förståelsenivåer.

Arne sa i en intervju att för honom kom genombrottet när han, trots att han var skeptisk till det, hade gått med på att utmana barnen med ett subtraktionsproblem som innehöll tvåsiffriga tal med tiotalsövergång, utan att först visa några metoder. Tanken var att samla elevernas alla idéer på tavlan och att be dem förklara hur de tänkte. Det hade öppnat hans ögon för hur rika deras idéer var, hur duktiga de var på att förklara hur de tänkte och hur entusiastiska barnen var när de såg alla olika metoder. Eleverna utvecklade en entusiasm inför att pröva nya metoder och att alltid vilja försöka hitta svaret själva, utan att få en metod presenterad.

Lärarna utvecklade också sin förmåga att skapa små problem ”på stående fot”. Dessa problem kunde visa sig bli mycket intressanta. Vi ger här ett litet exempel. Eleverna sitter i grupper om tre.

Läraren: *Dere får 23 boller. Hvordan vil dere dele dem?*

Efter tio minuter bad vi grupperna att presentera sina lösningar.

Grupp 1: *Vi får 7 hver. Så får Anne-Gunn 1 og Ingvill 1.*
Ingvill: *Fin løsning! Og rettferdig!*
Grupp 2: *Vi får 7 hver. Så delervi de to siste bollene sånn* (de ritar två bullar på tavlan med 1/3 bit bortskuren från varje). *Så får Torun och Maiken en hver og* Oda *får de to små.*
Ingvill: *Hvordan vet dere at det blir likt da?*
Grupp 2: *Siden de små bitene er halvparten av en stor.*
Grupp 3: *Vi delte 10 – 10 – 3, sa Kristine.*

När Ingvill frågade vem som bara skulle få tre, sa Krisitine att det var hon.

Men er ikke det urettferdig da? frågade Ingvill.
Nei da, sa Kristine. *Det er Mikael og Magne som får vondt i magen!*

Detta lilla problem gav oss möjlighet att reflektera över vilken matematik olika elever använde för att lösa problemet och de antaganden de gjorde när de löste det. De hade inte arbetat med eller diskuterat divisionsproblem eller bråk tidigare, men eleverna klarade att lösa dem. En grupp dividerade och fick rest, och bestämde också hur den skulle behandlas. Arne hade valt ett primtal för antal bullar eftersom han ville att olika lösningar skulle uppstå. Men han hade inte sagt till eleverna att de skulle dela lika. Detta är ett exempel på komponent 1 i Clarkes struktur.

Användning av icke-rutinproblem som startpunkt och fokus på undervisning som inte presenterar en lösningsprocedur.

Den relaterade uppfattningen är att:

Elever kan lösa icke-rutinproblem utan att först få undervisning om proceduren.

Klasserna bjöd in elever från årskurs fyra att besöka Matematiktivolit. Det öppnade ögonen hos andra lärare på skolan, och kanske viktigast av allt, hos rektor. Hon insåg för första gången att barn lärde sig matematik i en helt annan miljö än vad som dittills varit normen. Aktiviteterna var roliga och utmanande och de uppmuntrade matematiskt tänkande och resonemang. De andra lärarna ville veta vad som pågick i Arnes och Anne-Gunns klasser. Det blev starten på en process där hela skolan involverades i ett projekt som syftade till bättre matematikundervisning och -lärande för alla lärare och elever i skolan. Lärarna ville ha idéer att använda i sina egna klasser, men de önskade också kunskap om hur dessa idéer skulle kunna användas för att ersätta läroboken och om hur de skulle kunna känna sig säkra på att de fortfarande arbetade efter målen i den nationella kursplanen.

Med stöd av rektorn startade vi ett program som fortfarande pågår. Delarna i detta program kan återfinnas till exempel i Mouwitz (2001). Alla lärare på skolan ingår i grupper där matematik är ett prioriterat område för professionell utveckling. De har tid och plats för planering, reflektion och återkoppling. De använde Anne-Gunn, Arne och mig som ”mentorer”, för att få hjälp i den professionella utvecklingen och som kritiska vänner. Mellan kollegorna delade man med sig av lyckade klassrumsaktiviteter och projekt, elevarbeten visades upp och idéer och erfarenheter visades i text och bild på skolans webbplats.

Skolan valdes till ”demonstrationsskola” i två år från 2002. Orsaken till detta var det sätt på vilket undervisningen var synlig, professionell och speglade elevernas glädje över matematik. Anne-Gunn, Arne och andra lärare på skolan gav kurser för lärare från andra skolor, och de är nu engagerade i att utveckla undervisning och läromedel. De förvånar mig ofta med kreativa och professionella idéer för undervisning och läromedel. Arne har skrivit ner sina idéer, vilket har resulterat i sju häften med aktiviteter för matematik utomhus för årskurserna 1 till 7. Anne-Gunn har läst kurser i matematik och didaktik på universitetet för att utveckla sitt eget matematikkunnande.

Modell för att bygga upp en ”kritisk massa”

Vi tror att den här skolans modell för kompetensutveckling kan användas i större skala. För att lyckas med det vi skulle kunna kalla att bygga upp en kritisk massa av god matematikundervisning behöver vi en grupp utomordentligt duktiga lärare som kan spela den roll som forskaren hade i det utvecklingsprogram som beskrivits ovan. För att skolor ska kunna gå igenom en process som denna är det av största betydelse att

a skolans rektor är involverad i projektet,

b lärarna är motiverade, tror på projektet och är villiga att arbeta hårt för att förändra sin egen praktik,

c lärarna har tillgång till undervisningsmaterial,

d lärarna får tid och plats för reflektion och diskussion,

e en resurslärare kan tjänstgöra som rådgivare, komma med nya idéer, vara diskussionspartner och stödja lärare i deras ansträngningar att förbättra sin praktik.

Det kommer att finnas behov av lokala resurslärare för att initiera och följa upp projekt i ett antal skolor i sina egna kommuner. Vi har utvecklat ett program för att utbilda dessa lärare och vi använder det norska centrumet för matematikutbildning som en bas och som deras gemensamma mötesplats, där alla resurslärare träffas en gång om året för att reflektera och dela med sig av sina idéer och erfarenheter. Det nationella projektet kommer att utvärderas.

Hittills har vi 28 resurslärare från hela landet, från olika stadier i skolan. Planen är att öka antalet med 20 varje år under ytterligare tre år. De som vill bli resurslärare måste skriva en ansökan och redogöra för sin bakgrund och sina erfarenheter av lokalt utvecklingsarbete och förklara varför de anser att de är lämpliga i den här rollen. De utvalda bjuds sen in till ett tredagarsseminarium där de får lära sig att ordna kurser och göra uppföljningar med lärarna och de får studera forskningsresultat från lärarfortbildning i andra länder. Alla resurslärare utrustas med en matematisk koffert fylld med laborativt material, idéböcker och handledningar.

Det finns flera skillnader mellan modellen för att bygga upp en kritisk massa och det ursprungliga projektet som beskrivits ovan. I det ursprungliga projektet började vi med ett intensivt och nära samarbete mellan en forskare och två lärare på en skola. Detta samarbete ledde till en önskan bland andra lärare att göra något åt sin egen undervisning. Det är viktigt att betona att övriga lärare på denna skola verkligen lyckades göra betydande förändringar i sin egen matematikundervisning utan särskilt mycket stöd. Detta tror vi beror på en förändring av atmosfären och tankarna om vad matematik egentligen handlar om, och på det faktum att de i Anne-Gunns och Arnes klasser såg lyckliga barn som tyckte om och var duktiga i matematik. Lärarna *ville* ta till sig dessa lärares sätt att undervisa. I det stora projektet tänker vi ge resurslärarna den roll som forskaren haft i det ursprungliga projektet. Dessa behöver ha kapacitet och tid att engageras i projekt i ett flertal skolor. Vi måste också lita på att skolor förändras med mindre hjälp och stöd än i det ursprungliga projektet.

Det återstår att se om vi kan uppnå detta. Vad vi säkert vet är att många skolor redan är motiverade att förändra sin matematikundervisning, och att de ber om hjälp. Resurslärarna kommer inledningsvis att fokusera på sådana skolor. Vi hoppas att fler kommer att bli motiverade när de ser andra skolor lyckas, så att det sprider sig som ringar på vattnet.

En kritisk faktor är resurslärarna. De måste väljas ut bland de allra bästa lärarna som har egenskaper och förmåga att motivera, stödja och driva andra lärare framåt. Parallellt med det nationella projektet provar vi denna modell i mindre skala i Oslo, där 12 resurslärare ansvarar för vardera 20 skolbaserade projektgrupper, som i sin tur ska följa upp lärarna på de egna skolorna.

Diskussion

När det gäller Anne-Gunns och Arnes professionella utveckling och utvecklingen mot matematikundervisning av hög kvalitet ska jag visa på några av de förändringar som ägde rum och vad som åstadkom dessa.

Först och främst trivdes lärarna mycket bra med situationen där de fick möjlighet att planera aktiviteterna tillsammans med forskaren, att ha henne i klassrummet och att de fick tid för diskussioner och reflektioner efter lektionerna. De blev medvetna om vikten av att lyssna på elevernas idéer och bidrag i syfte att möta deras behov för att bygga upp ny begreppslig förståelse utgående från deras tidigare kunskaper och erfarenheter. De insåg också hur viktigt det var att de själva har en djup matematisk förståelse för att kunna hantera de utmaningar de ställs inför som lärare. Som nämndes följde Anne-Gunn upp det hon själv såg som sin egen professionella utveckling inom aktionsforskningsprojeket genom att läsa kurser i matematik och didaktik. Hon ville förbättra sin egen matematiska kompetens som en konsekvens av den kompetens i att undervisa med hög kvalitet hon uppnått genom projektet. Anne-Gunn och Arne hade upptäckt något som kanske inte alla lärare och lärarutbildare förstår: även lärare på småskole- och mellomtrinn behöver ha djup matematisk förståelse för att kunna undervisa i enlighet med konstruktivistiska inlärningsteorier. Liknande rön var tydliga i Clarkes studie (1997). En av lärarna i hans studie, som har många likheter med denna, kommenterade att hon lärt sig mer matematik genom att arbeta med någon som var "stark matematiskt" än under någon tidigare period (s 301).

Vilka var de viktiga faktorerna som åstadkom de förändringar och den högkvalitativa undervisning som lärarna utvecklade under hela studiens gång, och vilka aspekter var det som klart förbättrades? Om vi går tillbaka till Clarkes struktur visade lärarna en klar förbättring och utveckling på samtliga punkter. I denna diskussion ska vi särskilt uppmärksamma punkt 3 och 4 . De sammanfaller med de citerade ställningstagandena från Glenn-kommissionens rapport. Punkt 3 pekar på användning av flera olika arbetsformer i klassrummet (individuellt, smågrupper, helklass), och 4 handlar om en grupp med gemensamma intressen, värderingar och språk när det rör matematik, med läraren som medspelare som bygger vidare på elevernas lösningsmetoder.

Det finns skäl att tro att de utförliga och systematiska diskussioner som forskaren hade med lärarna efter varje tillfälle (varje vecka) var den huvudsakliga orsaken till den förändring som lärarna genomgick. Detta i kombination med lärarnas vilja och mod att pröva nya organisationsmodeller och att ta till sig öppna, undersökande uppgifter och problem, ledde med tiden till stora förändringar. Till skillnad från hos Clarke, som betonade vikten av att förse lärarna i den studien med undervisningsmaterial, verkade detta inte vara viktigt för dessa lärare. Det var viktigt i projektets början, innan de lärt sig att se världen med ”matematiska ögon” och att lyssna på eleverna med ”matematiska öron”. Men när forskaren, genom diskussioner kring åtskilliga exempel från deras egen undervisning, hade väglett dem och hjälpt dem att hitta de matematiska idéerna, utvecklade de sin egen kreativitet.

Vi använde konkreta exempel från klassrummet, analyserade dem och diskuterade hur olika reaktioner och bemötanden av elevernas frågor, kommentarer och svar kunde ha förbättrat undervisningens och lärandets kvalitet för eleverna. Vi prövade också ut olika lektionsplaneringar och utvecklade en fruktbar kombination av smågruppsaktiviteter och helklassdiskussioner. Organisation och möblering i klassrummen förändrades för att öka flexibiliteten och möjliggjorde därigenom en rik variation av undervisningsaktiviteter.

Erfarenheterna från detta projekt kommer att användas som modell för fortsatta kompetensutvecklingsprogram där resurslärarna kommer att spela en viktig roll. Reflektionerna och diskussionerna i det stora projektet kommer i stor utsträckning att genomföras i lärargrupper på de lokala skolorna. Som nämnts ovan kommer detta att vara beroende av skolledares vilja att skapa tid för denna typ av aktiviteter. Det stora projektet, som blir ett försök att hitta svar på frågorna b och c tidigare i denna artikel, kommer att följas och utvärderas, och resultaten publiceras i kommande artiklar.

Matematiktivoli

Idéerna i dessa aktiviteter kan användas på alla nivåer. Exemplen här utvecklades tillsammans med norska lärare och elever i årskurs 3 (8 till 9 år gamla). Uppgifterna och aktiviteterna var lika utmanade för eleverna i fyran som besökte tivolit.

Eleverna fick i uppgift att komma med uppslag till aktiviteter som skulle kunna ingå i tivolit, men dessförinnan behövde de få en uppfattning om vad vi menade med ett matematiktivoli. Vi ställde upp några stånd i klassrummet där vi presenterade olika aktiviteter som eleverna fick pröva. Vi hade tangram, ”gissa hur många kulor det är i lådan”, det klassiska problemet med geten, kålhuvudet och vargen som ska över floden (med modeller av allt), etc.

Efter detta hade eleverna en massa idéer. Dessa bearbetades av lärarna för att passa ihop med de matematiska utmaningar som var relevanta. När eleverna sa att de ville ha en fiskdamm på tivolit hittade vi på ett sätt att göra detta med hinkar, stenar, korkar, pinnar och snöre (se bilden på nästa sida). Vi kom överens om att det matematikinnehåll som detta tivoli skulle fokusera på var positionssystemet, addition och subtraktion, mätning samt cirkelns egenskaper. När lärarna hade bearbetat elevernas idéer frågade vi dem om de godkände det sätt på vilket vi ville förverkliga dessa, och det gjorde de. I denna artikel presenterar vi tre av de elva aktiviteterna som användes på matematiktivolit.

Fiskdammen

”Fiskarna” består av små plastpåsar med småstenar i, fastsatta på en kork med en krok gjord av piprensare så att ”fisken” inte ska sjunka.

Förberedelser

Varje elev tillverkar en ”fisk”. De börjar med att välja ett tal mellan 1 och 1000. Därefter samlar de rätt antal stenar, motsvarande siffersumman. De målar prickar i olika färger på varje sten. Röda stenar har värdet 100, blåa 10 och vita 1. Om en elev väljer 312, kommer hon att behöva 6 stenar och måla 3 röda, 1 blå och 2 vita. Sedan förpackas fisken. Metspön tillverkas av pinne, snöre och krok. Dammen är en hink med vatten.

I detta stånd får eleverna ett arbetsblad att fylla i:

Rött värde	Blått värde	Vitt värde	Fiskens värde

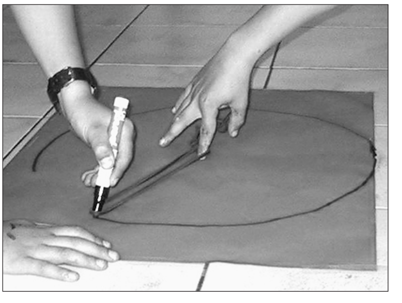
Vid dagens slut antecknas alla fångstvärden på tavlan. Eleverna ordnar dem från det minsta till det största och tar reda på vem som fångade den största ”fisken”.

Piltavlan

Eleverna tillverkar sina egna piltavlor. Vi vill ha en piltavla där chansen är lika stora att få 1000, 100, 10 eller 1. Lösningen är att dela cirkeln i 8 likadana sektorer, där två ger 1000 poäng, två ger 100, två ger 10 och två ger 1 poäng

Förberedelser

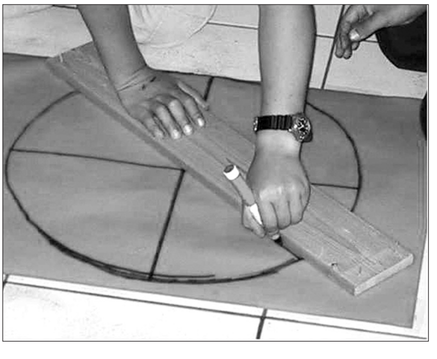
Eleverna arbetar i grupper om två eller tre. De får en stor bit kartong, ett snöre och en märkpenna.



Uppgifter

Använd dessa verktyg för att rita en cirkel. Efter diskussion räknade grupperna ut att det var en bra idé att knyta fast märkpennan i ena änden på snöret och utnyttja cirkelns egenskap att alla punkter har avståndet en snörlängd från mittpunkten.

Nästa uppgift är att dela cirkeln i åtta likadana sektorer och att märka dem med rätt poängtal.



Vid detta stånd får eleverna kasta fem pilar och sedan fylla i arbetsbladet:

________ + ________ + ________ + ________ + ________ = ________

Eleverna använder sedan en poängtavla och fyller i sina resultat.

Hur många och hur långa?

Detta stånd förbereds av läraren eller en liten grupp elever.

Material

En låda med små pinnar eller tändstickor (cirka 500), en snörrulle och saxar.

Vid detta stånd antecknar eleverna på en lapp hur många stickor de tror att lådan innehåller, hur lång varje sticka är och hur många meter eller centimeter de tror att raden av stickor skulle bli om man lade dem i en rad på golvet. Sedan klipper de av en bit snöre som svarar mot den längd de gissar på. De stoppar snöret i fickan. Vid dagens slut lägger eleverna alla stickor i en rad på golvet. Raden mäts med ett mäthjul och eleverna kontrollerar snörena för att se vem som gjort den bästa gissningen.

Frågor för reflektion

Eleverna kan få arrangera ett matematiktivoli när som helst. Utmaningen för läraren är att ta elevernas idéer på allvar och att ”matematisera” dessa idéer till något som hör till kursplanen.

I ovanstående exempel är det matematiska innehållet positionssystemet, cirkelns geometri och mätning. I den sista aktiviteten är uppgiften att se sambandet mellan en stickas längd, antalet stickor och längden på alla stickor tillsammans. Dessutom ska eleverna klippa till en bit snöre med den längd de bestämt. För många elever fanns det inget samband mellan de olika gissningarna, men för en del elever hängde de förvånansvärt väl ihop. Detta ger möjlighet till spännande diskussioner med eleverna efteråt.

Att utvidga aktiviteten

Matematiktivolit kan göras så stort och så utmanande man vill. Det kan utökas till så många stånd det finns tid och plats till. Utöver de tre stånd som beskrivits ovan hade vi spel (NIM, Yatzy, Tornet i Hanoi), lotterier och olika problemlösningsaktiviteter. Det är viktigt att eleverna är engagerade i planeringen och förberedelserna av stånden. Det erbjuder matematiska utmaningar förutom att det gör eleverna stolta över sitt arbete.

Kommentarer och förslag

När alltsammans är klart kan hälften av eleverna vara ”värdar” och hälften ”gäster” på matematiktivolit. Värdarna förklarar aktiviteterna och ser till att allt fungerar som det ska. Efteråt byter de roller. Eleverna bör också få lov att bjuda in andra klasser till tivolit. Då är de alla värdar för den besökande klassen. Detta ger dem en ännu större utmaning eftersom den besökande klassen inte känner till uppgifterna och aktiviteterna i förväg.

Referenser

Clarke, D.M. (1997). The changing role of the mathematics teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 278 – 308.

Glenn Commission. (2000). *Before it´s too late: A report to the nation from The National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century*. Education Publications Center, USA.

Holden, I.M. (1998). The teacher's role in building up students´ intrinsic motivation for learning mathematics. I T. Breiteg & G. Brekke (Red), *Theory into practice in mathematics education: Proceedings of Norma 98*. Kristiansand, Norge.

Holden, I.M. (2001). Matematiken blir rolig – genom ett viktig samspel mellan inre och yttre motivation. I B. Grevholm (Red), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s 160 – 182). Lund: Studentlitteratur.

Holden, I.M. & Nilssen, V. (1998). *Felix Fabula 3, matematikk. Matematikkboka, matematikk ekstraboka og lærerens bok*. Oslo, Norge: Universitetsforlaget.

Holden, I.M. & Nilssen, V. (1999). *Felix Fabula 4, matematikk. Matematikkboka, matematikk ekstraboka og lærerens bok*. Oslo, Norge: Universitetsforlaget.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Tillgänglig 11 juni 2006 på: http://www.nap.edu/books/0309069955/html/index.html

Mouwitz, L. (2001). *Hur kan lärare lära?* NCM-rapport 2001:2. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, Göteborgs Universitet.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

Många sätt att se på matematik och undervisning

THOMAS J. COONEY

I denna artikel talas varmt för ett pluralistiskt förhållningssätt till matematikundervisning som värdesätter olika undervisningsstilar och sammanhang som är inriktade på elevers tänkande. Forskning tyder på att lärares försök att förändra sin undervisning sällan omfattar en reforms alla beståndsdelar. Förändringsarbetet beror av de uppfattningar lärare har om matematik och matematikundervisning. Teoretiska perspektiv presenteras som stöd för att analysera dessa omständigheter och hur man kan lägga upp försök med att utveckla undervisningen. Att använda öppna frågor diskuteras som ett sätt att knyta an till elevers tänkande, med exempel och praktiska överväganden.

Om lärare ombeds att värdera undervisning i ett visst skolämne skulle svaren variera, men sannolikt skulle de fokusera två aspekter av skolning: Att utbilda läs-, skriv- och matematikkunniga medborgare för samhället samt att få dem att nå en bildningsnivå där de kan fatta välgrundade beslut rörande sina liv. Whitehead (1929) tänkte på utbildning som förvärvande av konsten att dra nytta av kunskap (s 16). För Whitehead är kultur en tankeaktivitet, något helt annat än en samling information. Dewey (1916) hade en liknande syn på utbildning då han såg den som en hörnsten i ett demokratiskt samhälle. Denna frigörande syn på utbildning döljs dock ofta bakom vad man kan kalla den tekniska sidan. Matematiken är inte immun mot en överbetoning av tekniska inslag. Beroende på den i många länder ökade uppmärksamheten på standardiserade test tenderar lärare att betona den traditionellt formella och rutinmässiga matematiken på bekostnad av processer där elever upptäcker eller skapar matematik. Betänk till exempel att lärarna i TIMSS videostudie ägnade mer än 60% av lektionstiden åt enkla rutinuppgifter, med japanska lärare som det enda undantaget (Hiebert m fl, 2003).

Även om det är svårt att argumentera mot värdet av att elever presterar bra på prov så kan denna tonvikt göra oss blinda för vår utbildnings högre värden, sådana som Whitehead och Dewey talar om. Freires begrepp om de förtrycktas pedagogik (1970) fångar den falska förmyndarmentalitet där elever förväntas samla information på bekostnad av kunskap om var informationen finns. För dessa forskare är utbildning i själva verket ett verktyg för att förändra samhället, snarare än för att förändra individen för att passa in i ett givet samhälle.

Denna syn på undervisning är knappast ny för matematikutbildning. Trots att matematik ofta betraktas som ett kulturellt obundet ämne argumenterar Lakatos (1976) samt Davis och Hersh (1981) för matematikens felbarhet (även experter kan ha fel), ett perspektiv som placerar matematikens grundvalar i händerna på dem som skapar den – ett förhållande som talar emot att matematiken är icke-kulturell. Tyvärr har den formalisering som har karakteriserat matematikens utveckling ofta genomsyrat undervisningen. Wittman (1992) drog slutsatsen att denna inneboende matematiska formalisering utgör ett hinder för att komma tillrätta med det som brukar beskrivas med ”sändarmetaforen” i matematikundervisningen. Hiebert m fl (2003) fann exempelvis att lärarna i deltagande länder i TIMSS videostudie talade i genomsnitt 90% av tiden. Wittmanns argument är att matematikens natur leder till en pedagogisk stil som ofta resulterar i ett formalistiskt undervisningssätt och som inte ser värdet i elevers egen konstruktion av matematiska idéer.

De flesta reformrörelser förespråkar en viss mångfald (dvs att betrakta matematik utifrån olika perspektiv) när det gäller undervisning. Processer som problemlösning, resonemang och kopplingar mellan matematik och situationer i verkligheten betonas, jämför t ex *Standards* som utvecklats av the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Matematikinnehållet är centralt när det gäller denna mångfald liksom vikten av att elever tillgodogör sig processer för att skapa matematik (NCTM, 2000). Cooney och Wiegel (2003) hävdar att matematikundervisning för lärare ska bygga på följande tre principer:

Princip 1: Blivande lärare ska under sin utbildning uppleva matematik som ett pluralistiskt ämne.

Princip 2: Blivande lärare ska under sin utbildning explicit studera och reflektera över skolmatematik.

Princip 3: Blivande lärare ska under sin utbildning uppleva matematik på olika sätt som stödjer utveckling av processorienterade arbetssätt.

Argumenten bakom principerna bygger på övertygelsen att det är orimligt för lärare att undervisa i matematik utifrån ett pluralistiskt perspektiv om de inte själva har mött sådan undervisning. Dessutom bör lärare ha erfarenhet av just den matematik som de förväntas undervisa. Alltför ofta är lärares egna matematikerfarenheter begränsade till studier av ”högre matematik”, och därmed går de miste om tillfällen att uppleva skolmatematik från ett pluralistiskt perspektiv. Detta är inte ett argument mot studier av matematik på högre nivå, utan ett argument för att lärare bör uppleva olika perspektiv på den matematik de själva kommer att undervisa i och få möjlighet att möta de sätt på vilka elever bygger upp matematik.

Syftet med de tre principerna är att komma ifrån traditionell enkelriktad katederundervisning och ge lärare en rikare syn på den matematik som har särskild relevans för skolmatematik. Men bilden är komplicerad och forskning har konsekvent visat att reformrörelser och utvecklingsarbeten som berör lärarutbildning måste räkna med en mängd hinder för att lärare ska kunna genomföra avsedd förändring. Hur vi kan se på dessa problem är ämnet för nästa avsnitt.

Teoretiska överväganden

Mycket av forskningen kring lärares utveckling karakteriseras av det faktum att några förändrar sig medan andra inte gör det. En del lärare ändrar några aspekter i sin undervisning men inte andra. Utveckling innebär sällan allt eller inget. En studie av en lärare för elever i åldrarna 12–15 år, Mr Burt, som försökte förändra sin undervisning, avslöjade att hans undervisning blev mer begreppsligt baserad men att den förblev lärarcentrerad – ett förhållande som inte var i linje med den tilltänkta förändringen (Wilson & Goldenberg, 1998). Lärares olika läggning och föreställningar om matematik och undervisning påverkar genomförande av reformerna. Cooney, Shealy och Arvold (1998) gjorde en studie av fyra blivande lärare för motsvarande svenskt gymnasium, under deras sista år i lärarutbildningen, inklusive praktik. Denna avslöjade slående skillnader i uppfattningar hos de fyra lärarna. Greg, å ena sidan modifierade sina uppfattningar när han tog till sig ett reformorienterat förhållningssätt till undervisning. Han förkastade till exempel från början användning av teknologi i sin undervisning medan han senare gärna använde den. Henry, å andra sidan, förändrades ytterst lite och hade en mer dogmatisk och konservativ syn på matematikundervisning. Fastän Greg och Henry var kollegor som läste i stort sett samma kurser i matematikdidaktik leddes de av sina grundläggande uppfattningar till helt olika undervisningsstilar.

Lärares uppfattningar påverkar inte endast undervisningen och deras benägenhet att utveckla den, utan även bedömnings- och utvärderingsmetoder. Även om det verkar logiskt att bedömning skulle vara i linje med eller ha koppling till undervisningspraktik så är detta inte alltid fallet. Till exempel fann Hancock (1994) att lärares test och förhör var klart skilda från undervisningsaktiviteterna. Wilson, Cooney och Stinson (2005) fann att för vissa lärare var bedömning snarare en fråga om betygssättning och ett sätt att bestämma undervisningstakten än att få tillgång till elevernas matematiska tänkande, som lämnades helt utan reflektion. Vidare fann Senk, Beckmann och Thompson (1997) att lärares tester mestadels innehöll proceduriella uppgifter på låg nivå. Öppna uppgifter som hade olika lösningar eller krävde att eleverna kommunicerade sitt matematiskt tänkande förekom sällan. Exempel på öppna uppgifter ges i slutet av artikeln. Dessa resultat antyder att lärare inte är särskilt skickliga på att hitta sätt att förstå hur elever bygger upp matematiska idéer.

Sanchez (2001) studerade lärares deltagande i ett kompetensutvecklingsprogram upplagt för att underlätta och uppmuntra användning av just öppna uppgifter. Som en del av programmet skapade lärarna en mängd öppna uppgifter som de tyckte var lämpliga för egen undervisning. Trots att de arbetade med väsentligen samma aktiviteter var deras användning av öppna uppgifter helt olika, något som framgår av Sanchez studie av tre deltagande gymnasielärare.

Keith använde ofta öppna frågor och satte värde på den information han därigenom fick om elevers tänkande. Han menade att den var ovärderlig för hans lektionsplanering.

Todd använde också ofta sådana frågor, men drog sällan fördel av den tillgängliga informationen om elevers tänkande. För Todd låg värdet av öppna frågor mer i deras förmåga att motivera eleverna än som ett medel att förstå deras tänkande. Hans användning var mer baserad på skolsystemets auktoritet än på föreställningen att de kunde förbättra hans undervisning.

Robin ville att hennes elever skulle koppla matematiken till situationer i verkligheten och förstå olika samband. I enlighet med denna syn använde hon öppna frågor för att åstadkomma dessa kopplingar, även om användningen inte var särskilt omfattande.

Sanchez studie illustrerar att lärares internalisering av aktiviteter från lärarutbildningen varierar, utan tvekan genom påverkan av deras uppfattningar både av undervisning och matematiklärande.

Dessa resultat är knappast förvånande, men de talar starkt för en tolkning som går bortom och vidgar det dikotomiska förhållandet ”vissa gör det och vissa gör det inte”. En teoretisk lins för begreppsbildning i lärares utveckling föreslås i nästa avdelning.

Analys av uppfattningar

Det är viktigt att inse att uppfattningar inte är endimensionella i termer av den intensitet varmed de omfattas. En del uppfattningar är grundade i avsevärd övertygelse, andra inte. Detta illustreras i en studie av Skott (2001), av en nyutbildad lärare, Christopher. Han verkade ha en reformorienterad syn på matematikundervisning, men i klassrummets skärseld tenderade hans undervisning att bli traditionell. Christophers uppfattningar om matematikundervisning blev föremål för omtolkningar när andra uppfattningar kom in i bilden. Han ville till exempel förbättra elevernas självförtroende, en föresats som ledde till en mer konservativ undervisningsstil. Det verkar rimligt att påstå att en del av Christophers uppfattningar om undervisning i allmänhet var starkare än hans uppfattningar om matematikundervisning i synnerhet.

Green (1971) gör en metaforisk analys då han skiljer mellan uppfattningar som är centrala eller perifera eller, ur ett kvasilogiskt perspektiv, primära eller härledda. Poängen är att alla uppfattningar inte omfattas med samma intensitet – vilket illustreras av Christopher (Skott, 2001). Implikationer av detta perspektiv inbegriper att bestämma inte bara vad lärare tror om matematik, om undervisning och inlärning, utan också att bestämma relationen mellan dessa uppfattningar, det vill säga vilka som är centrala och vilka som är perifera. En besläktad fråga som förtjänar uppmärksamhet involverar en undersökning av grundvalarna för dessa uppfattningar. Green (1971) talar om två olika slags uppfattningar:

– Argumentbaserade (held evidentially)
– Icke-argumentbaserade (held nonevidentially).

Den förra grundar sig på argumentation och kan därmed bli föremål för modifiering om grunden skulle ändras. Den senare bygger inte på argumentering utan konstrueras på ett icke förnuftsmässigt sätt och är därmed inte så mottaglig för modifiering. När det gäller uppfattningar som omfattas på argumentbaserad grund överväger individen argument som hjälper till att forma eller modifiera dessa uppfattningar. Som kontrast låter en person som har icke-argumentsbaserade uppfattningar sin övertygelse bestämma vad som utgör argumenten, det vill säga endast situationer som bekräftar hans eller hennes uppfattningar anses giltiga. Stereotyper är ett slags icke-argumentsbaserade uppfattningar. Fallen Greg och Henry illustrerar dessa två olika sorters uppfattningar (Cooney, Shealy & Arvold, 1998). Till en början var Greg emot användningen av tekniska hjälpmedel då han ansåg att hans primära mål var att hjälpa eleverna att förbereda sig för livet, och han såg tekniken som ett hinder för att uppnå detta mål. När han fick erfarenhet av teknikanvändning såg han dock de fördelar som tekniken kunde medföra för elevernas lärande, och följaktligen blev han en stark förkämpe för användning i klassrummet. Kort sagt, han ackommoderade uppfattningar om teknikanvändning till sin uppfattning om att förbereda eleverna för livet. Henry, å andra sidan, ville inte kännas vid den ”argumentering” som influerade Greg, eller han tolkade åtminstone argumenten annorlunda och drog slutsatsen att teknikanvändning var skadlig för elevers lärande.

Om man accepterar Schefflers (1965) begrepp att ”A belief is a cluster of dispositions to do various things under various associated circumstances” (s 85) så kan vi börja förklara möjliga skillnader mellan vad lärare bekänner sig till under intervjuer och deras handlingar i klassrummet. Både intervjusvar och undervisning är manifestationer av uppfattningar. Dessa olika kontexter gör det möjligt att se vilka uppfattningar som är centrala och vilka som är perifera och att fundera över deras ursprung. Det kan mycket väl vara så att uppfattningar som man bekänner sig till i en intervju baseras på erfarenheter som man nyligen tillägnat sig, genom att ha läst en ny kursplan eller på erfarenheter från en nyss genomförd lärarutbildning, medan uppfattningar som manifesteras i klassrummet kan baseras på tidigare erfarenheter som elev. Christopher är ett exempel på detta (Skott, 2001). Hans reformorientering kan ha varit en produkt av hans lärarutbildning – en erfarenhet som låg ganska nära i tiden. Å andra sidan kan Christophers ambition att ge eleverna bättre självförtroende ha baserats på hans egna erfarenheter som elev och sålunda ha gett denna uppfattning en mer substantiell bas.

Detta visar att uppfattningar grundläggs på olika sätt och följaktligen utvecklas inte samma sorts engagemang. I själva verket är icke-argumentsbaserade uppfattningar mycket svåra att förändra på grund av frånvaron av egentliga argument för dem. Föreställ er svårigheten att påverka en läraruppfattning som helt baseras på en ovillkorlig auktoritet. När uppfattningar om matematik och undervisning baseras på auktoritet med liten eller ingen argumentation som stöd blir resultatet vad Green (1971) kallar indoktrinering vilket innebär överföring av information utan stödjande evidens. I motsats till indoktrinering består undervisning av att göra eleverna kapabla att förvärva kunskap på argumentbaserad grund. Indoktrinering innebär till exempel att bara fastslå Pythagoras sats. Undervisning innebär att presentera en kontext där elever kan se att Pythagoras sats är en logisk följd av matematiska resonemang.

En modell för personlig utveckling

Greens analys tillhandahåller ett verktyg för att differentiera mellan lärares uppfattningar och för att överväga vilka uppfattningar som är påverkbara. Frågan kvarstår dock varför en individ har argumentbaserade uppfattningar och andra inte har det. För denna sorts analys är Perrys (1970) forskning kring individers intellektuella och etiska utveckling särskilt relevant. Perrys nyskapande arbete baseras på individens förmåga att tänka kontextuellt. Perrys modell består av fyra grundläggande stadier:

- *dualistisk* (sanningen bestäms av en auktoritet),
- *multiplistisk* (människor har olika uppfattningar om saker och ting, men sanningen finns fortfarande hos en auktoritet),
- *relativistisk* (sanningen bestäms av kontexten – alla ståndpunkter duger inte lika bra),
- *engagemang* (individen tar personlig ställning för en av ståndpunkterna genom logiskt resonemang).

Det finns en kritisk punkt i Perrys system när individen förflyttar sig från ett multiplistiskt förhållningssätt där individen anser att alla har rätt till sin egen ståndpunkt men där det i själva verket finns ett korrekt förhållningssätt, till en relativistisk ståndpunkt där individen ser att olika ståndpunkter duger fast kanske inte lika bra. Det är i detta relativistiska stadium som individen förstår kontextens betydelse vid analyser av situationer. En person i engagemangsstadiet liknar en individ i det dualistiska stadiet i det att de båda håller fast vid en speciell ståndpunkt. Men, till skillnad från dualisten har den engagerade individen grundat sina uppfattningar på en argumentation med en sammanhängande logik som inte är beroende av någon särskild auktoritet. Perrys system är komplicerat, men det fångar det centrala i en individs vilja att tänka kontextuellt.

En brist i Perrys arbete är att urvalet i hans studie är begränsat till manliga studerande vid Harvard. Som komplement till denna begränsning studerade Belenky, Clinchy, Goldberger och Tarule (1986) en grupp kvinnor i olika stadier i livet och kategoriserade dem enligt deras förmåga att lita till eget förnuft vid olika ställningstaganden. Denna forskning resulterade inte i ett utvecklingssystem som Perrys, men bekräftade förekomsten av individer som följer auktoriteter i motsats till individer som tillåter egna känslor och eget intellekt att forma uppfattningar. För en detaljerad analys av Perry och Belenky med fleras system, se Cooney, Shealy och Arvold (1998).

Baxter Magolda (1992) studerade 101 män och kvinnor då de genomgick högskoleutbildning och fann fyra tydliga stadier i studenternas tänkande: Absolut kunnande, övergångskunnande, oberoende kunnande och kontextuellt kunnande. Dessa fyra stadier liknade Perrys genom att de speglade individens utveckling mot att se situationer kontextuellt. Baxter Magolda fann få belägg för att studenter uppvisade kontextuellt kunnande förrän de befann sig på forskarnivå. På motsvarande sätt visade sig Perrys engagemangsstadium hos studenter först under deras sista högskoleår.

Var och en av dessa modeller beskriver hur individer på olika stadier förhåller sig till auktoriteter. På de tidiga stadierna tenderar individen att se situationer som rätt eller fel, svart eller vitt, med föga tolerans för att det kan finnas mellanliggande nyanser. I senare stadier låter individen kontexten spela in när uppfattningen formas. Föreställningen om rätt och fel i absolut mening ger vika för insikten att individer hittar sätt att beskriva och förstå sin omvärld i den kontext de existerar. Detta innebär inte att den senare ståndpunkten bortser från begreppen rätt och fel, snarare krävs att det finns logisk grund för en sådan bestämning till skillnad från att enbart lita till en auktoritet när det gäller vad som är rätt.

Dessa modeller ger en användbar lins genom vilken lärares utveckling kan betraktas. Även om lärare representerar andra populationer än de som förekom i den ursprungliga forskningen kan modellerna användas heuristiskt för att beskriva hur lärare bildar sina uppfattningar. Cooney, Shealy och Arvold (1998) använde t ex Perrys, Belenkys och andras modeller för att karakterisera hur blivande lärare för äldre elever reagerar på sin lärarutbildning. De beskrev följande fyra positioner:

- *isolationist* (en som förkastar nya idéer till förmån för den egna),
- *naiv idealist* (accepterar okritiskt idéer för att främja kollegialitet),
- *naiv konnektionist* (ser samband och motstridiga ståndpunkter men löser inte konflikten),
- *reflekterande konnektionist* (tillstår att det finns en konflikt, hanterar den på ett reflekterande sätt och är beredd att ansluta sig till en av ståndpunkterna).

Även om lärare sällan passar in precis i någon av dessa kategorier ger de en insikt i arten av individuella uppfattningar och hur de är konstruerade.

Det finns en risk i att utveckla modeller som karakteriserar individer på speciella sätt. Icke desto mindre kan modellen vara användbar om den kan tillföra något utöver själva karakteriseringen. När individer börjar se olika perspektiv har de möjlighet att ifrågasätta existerande undervisningssätt och, åtminstone i viss utsträckning, reformera sin undervisning på något genomtänkt sätt. Den forskning som citerades tidigare antyder att förändring är svårt; lärare har ofta dogmatiska synpunkter rörande matematikundervisning och är ovilliga att ge avkall på det de anser vara effektiva undervisningsmetoder. Men om lärarutbildningen kan skapa situationer där lärare kan lyfta fram frågor om sin undervisning, så frön av tvivel och göra det i en stödjande miljö med kritiska vänner (Krainer, 2001), då har man skapat en grogrund för reformer.

I nästa avsnitt reflekteras över värdet av denna analys för att utveckla utbildningsprogram både för lärarutbildning och lärarfortbildning.

Implikationer för lärarutbildning

Modellerna som diskuterats i förra avsnittet fokuserar på i vilken utsträckning individer låter argumentering påverka uppfattningar snarare än att basera dem på uttalanden från auktoriteter. Dessa behöver inte vara individer, det kan vara uttalanden från professionella organisationer som *NCTM Standards*, eller åsikter från kollektiv som inte ifrågasatts. Isolationisten tenderar till exempel att hålla argument ifrån sig till förmån för egna övertygelser, vilka förblir outmanade och entydigt accepterade (Cooney m fl, 1998). Den naive idealisten accepterar idéer men inte på något kritiskt sätt. Individer som reflekterar över någon av dessa ståndpunkter kommer troligen inte att ta till sig (ackommodera) förändring på något djupare plan. En konnektionist, å andra sidan, har förmåga att se hur idéer knyter an till egna uppfattningar och har därmed möjlighet till djupgående förändring, även om det är långtifrån säkert att den äger rum.

Övergång mellan stadier är beroende av något slags tvivel, för det är utan tvekan så att tvivel utgör kärnan i det reflekterande tänkandet. Där det råder visshet saknas grund för tvivel och följaktligen föga anledning att utmana sig själv med nya idéer. Detta innebär inte att lärare måste tvivla på allt de gör, men däremot att undervisning och sätt att utvärdera kan vinna på att utsättas för tvivel, genom viljan att utmana existerande praktik. Låt oss betrakta några exempel.

En startpunkt är att fundera över vad matematik betyder för oss. Hur definierar vi matematik? När Davis (1999) ställde frågan *Vad är matematik?* till sina lärarstuderande genererades tre grundteman: En studie av relationer, en studie av mönster och formella definitioner hämtade ordagrant från uppslagsböcker. Svaren speglade vad en tidigare föreläsare hade sagt eller vad som påstods i någon av kursböckerna. Ingen av studenterna kom på tanken att lägga till egna åsikter eller att uttrycka vad matematik hade betytt för dem personligen. Kort sagt, deras svar speglade vad en auktoritet tidigare hade bestämt att matematik är.

Det är svårt att se hur ett sådant perspektiv kan leda dessa lärarstuderande att se matematiken som en mänsklig konstruktion.

I ett försök att ta sig an innebörden av matematik, dess undervisning och lärande uppmanar Cooney, Brown, Dossey, Schrage och Wittmann (1999) lärare att fundera över vilka faktorer som påverkar deras undervisning genom att undersöka den innebörd av matematik som kommer till uttryck i media och att fundera över vilka olika analogier som bäst speglar vad matematikundervisning är. Till exempel, vilken av följande analogier representerar bäst en matematiklärare, och varför:

- nyhetsuppläsare
- missionär
- socialarbetare
- dirigent
- trädgårdsmästare
- underhållare
- läkare
- lokförare
- tränare

Att fundera över innebörden av matematik är ingen trivial fråga. Matematik definieras ofta på olika sätt i olika samhällen. Industriarbetare tenderar att definiera matematik i termer av baskunskaper, medan föräldrar med akademiska yrken sannolikt har en bredare syn på matematik. Föräldrar är viktiga aktörer när det gäller vad som ska undervisas i skolorna och hur det ska göras. Detta innebär inte att läraren ska vara passiv, men det är orealistiskt att tro att läraren ensam definierar vad som utgör matematik. Särskilt gäller detta när lärare inte på allvar har funderat över vad matematik betyder för dem och vilka implikationer som finns för deras matematikundervisning.

Det finns också en föreställning om att integrera innehåll och pedagogik. Cooney m fl (1999) närmar sig denna integration i ett försök att komma tillrätta med det som beskrivs med sändarmetaforen. Av de tre principer som presenteras av Cooney och Wiegel (2003) är den första principen kanske den viktigaste:

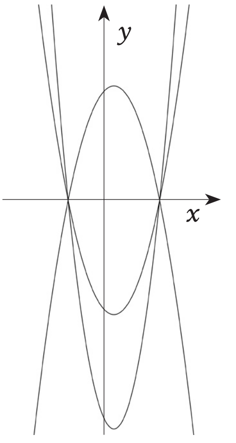
> *Blivande lärare bör uppleva matematik som ett mångfasetterat ämne.*

Det är när lärare ser matematik från olika perspektiv som de kan börja förstå matematikens underliggande natur. Varför är funktioner, som alla studenter kommer i kontakt med, så viktiga i skolmatematiken? Orsakerna är många, inte minst att det krävs en stor variation av funktioner för att modellera verkliga fenomen. Världen är inte endast linjär till sin natur. Genom olika slags matematiska erfarenheter kan lärare se funktioner som sätt att betrakta världen och inte bara symboler som ska manipuleras, och därigenom utveckla en bredare förståelse för funktionsbegreppet och hur man kan undervisa om det. Det är denna slags integration av innehåll och pedagogik som främjar en mångfasetterad matematikundervisning.

När lärare eller blivande lärare undervisas i matematik ur ett strikt formalistiskt perspektiv finns liten anledning för dem att betrakta matematik i ett humanistiskt perspektiv, särskilt skolmatematik som eleverna traditionellt mött och lärt. Men när matematik undervisas på ett pluralistiskt sätt kan matematiken ses från många olika perspektiv – perspektiv som uppmuntrar lärare att fundera över inte bara olika innebörder av matematik utan också över mångfalden i matematikundervisningen. Tänk till exempel på de olika föreställningar om ekvationer som sätts i spel när enkla linjära ekvationer löses med hjälp av kalkylprogram eller grafräknare som komplement till vanliga symboliska manipulationer av en ekvations båda led. Det handlar inte om att en metod att lösa ekvationer är bättre än någon annan utan snarare om att ekvationslösning bör innefatta en variation av matematiska begrepp, inklusive grafiska tolkningar.

Oavsett om man diskuterar uppfattningar av matematik eller olika sätt att undervisa eller utvärdera är fördelen med ett mångfasetterat förhållningssätt att lärare får erfarenheter av att arbeta med samma matematik som de kommer att undervisa om, men ur berikande perspektiv. Dessa erfarenheter kan få lärare att, på ett positivt sätt, ifrågasätta olika alternativ för matematikundervisning och utvärdering. Genom reflektionsprocessen kan lärare överväga värdet av att undervisa ett moment utifrån ett perspektiv jämfört med att göra det utifrån ett annat. På detta sätt blir matematikundervisningen vetenskaplig genom att frågor ställs (vilken metod är bäst), data insamlas (elevers prestationer och attityder) och beslut fattas (vid ett moment kan en metod vara mer fördelaktig än en annan). Denna reflekterande process leder till uppfattningar om undervisning som är grundade på argumentering och som är påverkbara. Pluralism har att göra med en mångfald sätt att undervisa i matematik så att lärare kan ge akt på elevers tänkande. Självklart kan inte en enda undervisningsmetod, vare sig det är föreläsning eller undersökande arbetssätt, fungera i alla sammanhang. Pluralism är beroende av information om elevers tänkande, annars blir förändringar av undervisningsmetoder rena gissningsförsök och maximerar högst osannolikt elevers lärande. Fundera över elevsvaren på följande fråga:

Janice talar om för Sara var en andragradsfunktion skär x-axeln. Sara hävdar att hon har tillräcklig information för att bestämma Janice ekvation. Håller du med Sara? Varför eller varför inte?



Nej, Sara behöver också känna till maximipunkten. Om hon bara har skärningspunkterna finns det fortfarande oändligt många möjliga ekvationer.

Ja, hon kan skriva den så här $(x-3)(x+2)$, multiplicera och finna ekvationen.

Ja, om vi känner till skärningar med x-axeln, så kan vi hitta skärningarna med y-axeln. Därifrån kan vi komma fram till ekvationerna.

De tre eleverna uppvisar tydligt olika slags förståelse, något som läraren kan dra fördel av i följande undervisning. Det är här som pluralism är särskilt viktig. Hur kan läraren hantera elevernas missuppfattningar ur varierande perspektiv? I nästa avsnitt fokuseras mer uttalat lärares användning av öppna frågor som ett medel att skapa en grund för ett pluralistiskt förhållningssätt till undervisning.

Praktiska överväganden

Det finns många sätt att främja pluralism i matematikundervisningen, men grundläggande för alla metoder är lärares förmåga att förstå sina elevers tänkande. Användning av öppna frågor är en möjlighet. Att veta hur elever tänker är till hjälp för att försäkra sig om att det är undervisning och inte indoktrinering som äger rum, jmf Green (1971). Undervisningen är av nödvändighet en anpassning till olika sammanhang. Elever, klasser och skolor är olika. Som framhölls tidigare är reflektion och anpassning till kontexten hörnstenar i en reformering av matematikundervisningen. Användning av öppna frågor kan ge en bas åt denna reflektion. Tänk exempelvis på de tre elevsvar som presenterades tidigare. Varje elev visade förståelse av momentet men ändå uppvisade vart och ett av svaren brister, vissa allvarligare än andra. Anpassning till denna typ av information kan ge läraren avsevärt bättre möjlighet att fatta beslut om hur elevers lärande kan underlättas.

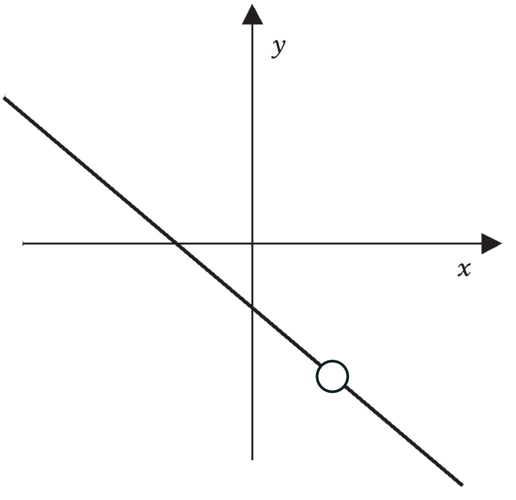
Öppna frågors natur

Öppna frågor kräver per definition att elever kommunicerar sina tankar kring problemlösning och resonemang. En typisk fråga som ofta ställs till elever är att hitta den minsta gemensamma nämnaren till 18 och 24. En parallell öppen fråga skulle kunna vara ”Varför kan inte 48 vara den minsta gemensamma nämnaren till 18 och 24?” Denna fråga kräver att eleven redovisar mer omfattande än att endast leverera ett svar. Elever är ofta vana vid att tänka på matematikfrågor som något som kräver att de genererar enskilda svar, ofta i form av ett tal. Följande öppna frågor kräver mer och dessutom finns ingen färdig procedur för hur de ska besvaras.

1 Anta att du har glömt vad 8×6 är, men att du kommer ihåg att $5 \times 6 = 30$. Hur kan du använda detta faktum för att hitta produkten 8×6?

2 Fred hävdar att om två cylindrar har lika stor begränsningsarea så måste de ha samma volym. Marcia håller inte med utan påstår att de kan ha olika volymer. Vem har rätt och varför?

3 Skriv ned en rationell funktion vars graf kan vara den i figuren. Förklara varför din funktion svarar mot den givna grafen.



Exempel på olika elevsvar på den första frågan återges nedan. (Svaren är kopierade från autentiska elevsvar. Se Cooney, Sanchez, Leatham och Mewborn (2002) på www.heineman.com/math)

– *Lägg till 8 så får du svaret.*

– *Man lägger bara till tre sexor till*

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ 18 \\ \hline 48 \end{array}$$

Så $8 \times 6 = 48$

– $6 \times 5 = 30$ *och om man lägger ihop* 8 *och* 6 *så blir det* 14. *Så om man lägger* 14 *till* 30 *så blir det* 44. *Sedan kommer man ihåg att man har* 8:*an. Man kan ta* 8:*an i stället för* 4:*an och då får man* 48.

– *Om man vet att* $5 \times 6 = 30$ *så kan man räkna upp till* 6×8 *så här:* $5 \times 6 = 30$. $6 \times 6 = 36$, $7 \times 6 = 42$. *Nu kan man använda fingrarna.* 43, 44, 45, 46, 47, 48. *Alltså* $8 \times 6 = 48$. *Se, jag använde sex tal för att komma till* 48 *från* 42. *Så jag vet att* $8 \times 6 = 48$.

Det skulle vara svårt att förutsäga sådana elevsvar. Ändå finns det för den reflekterande läraren mycket att lära sig av dessa elevsvar.

Öppna frågor ger eleverna tillfälle att visa hur de tänker. För den lärare som har ett pluralistiskt förhållningssätt till undervisning skapar detta en kontext där en variation av undervisningsmetoder kan komma ifråga.

Att skapa öppna frågor

Ett projekt lett av Cooney, Sanchez, Leatham och Mewborn (2002) fokuserade på att utveckla öppna frågor som lärare lätt skulle kunna använda i sin undervisning. Författarna utvecklade en uppsättning om 450 frågor som täckte följande fem områden: tal och räkning, sannolikhet och statistik, mätning, generaliserbara mönster och algebra samt geometri och spatial förmåga. Frågor från dessa fem områden testades på fältet och reviderades så att de blev lämpliga för elever i årskurs 3–11. Ungefär 300 av frågorna har exempel på elevsvar, jämför de ovan redovisade. (Se www.heineman.com/math för en sökbar databas som innehåller frågorna, elevsvaren och information om användning.) Dessa frågor kan fungera som klassrumsresurs för lärare, speciellt i ljuset av existerande forskning, se t ex Senk m fl (1997) som visat att lärare sällan har tillgång till öppna frågor.

Det finns också olika sätt för lärare att skapa egna öppna frågor. Följande två frågetyper har lärare funnit användbara. Andra tekniker för att generera öppna frågor finns på www.heineman.com/math.

- Be elever skapa en situation eller ett exempel som uppfyller vissa villkor.
- Utgå från två (hypotetiska) elever som har motstridiga uppfattningar, be dina elever att förklara vem som har rätt och varför.

Den första metoden illustreras i fråga 3 ovan, där eleverna ombeds att generera en rationell funktion till en given graf. Ett annat sätt, som illustrerar denna metod att skapa öppna frågor följer nedan.

> Identifiera tre tal vars största gemensamma faktor är 5 och vars minsta gemensamma multipel är 180. Beskriv hur du fann talen.

Den andra metoden att skapa öppna frågor illustreras i fråga 2 ovan där Fred och Marcia funderar på cylindrar med lika stora begränsningsareor. Följande fråga illustrerar också denna metod att skapa öppna frågor.

Perry påstår att 3 inte är ett nollställe till polynomet nedan. Janice påstår att 3 skulle kunna vara ett nollställe, beroende på värdet av a. Vem har rätt, och varför?

$$2x^4 + ax^3 + 3x^2 - 5x + 10$$

Användning av öppna frågor kan ge insikt i elevers tänkande och sätt att konstruera matematiska idéer och därigenom ge en meningsfull bas för en pluralistisk undervisning. Det är dock viktigt att inse att enbart användning av öppna frågor utan att man drar nytta av elevernas tänkande är av föga värde, vilket visades av Sanchez (2001).

Avslutande kommentarer

Denna artikel har presenterat olika teoretiska perspektiv för analys av lärares uppfattningar, hur dessa bildas och hur man kan bearbeta dem i kompetensutvecklingsprogram för att främja alternativa undervisningsstrategier. För att lärare ska inse behovet av dessa alternativa strategier måste de se dem som ett sätt att undersöka sina elevers matematiska tänkande. Analys av elevsvar på öppna frågor kan ge lärare en kontext för att se hur elever konstruerar matematiska idéer på olika sätt och för att fundera över varför en enskild undervisningsmetod inte är tillräcklig för att främja matematiklärande på ett effektivt sätt. De teoretiska modeller som presenterats handlar om i vilken grad lärare tänker relativistiskt och är öppna för att ompröva sina uppfattningar om matematik, matematikundervisning och hur elever tänker om matematik. Flera av modellerna beskriver en utveckling och vi kan se det som en möjlighet att lärare kan bli relativistiska eller engagerade tänkare (Perry, 1970) där de tidigare kan ha varit mer begränsade i sina tankar. Dessa modeller betonar vikten av pluralism i den meningen att lärare behöver erfara matematik på många olika sätt, inklusive, men inte med begränsning till, matematisk formalism. Det är genom variation av aktiviteter i lärarutbildning i kombination med betoning på reflekterande tankesätt samt fokus på elevers tänkande som en grund för förändring kan skapas.

Olika sätt att skapa öppna frågor har presenterats som ett sätt för lärare att förstå elevers tänkande för att få bättre underlag för undervisningen. Det är genom undersökning av elevers tänkande som pluralismen kan spela en grundläggande roll om lärare ska reformera sin undervisning. Skapandet av mångfassetterade idéer om matematikundervisning är matematiklärarutbildarnas ansvar och deras arbete kan vägledas av de perspektiv som presenterats tidigare. Pluralismen kan utgöra en bas för den slags utbildning som Whitehead (1929) och Dewey (1916) föreställde sig.

Referenser

Baxter Magolda, M. (1992). *Knowing and reasoning in college.* San Francisco: Jossey-Bass Inc.

Belenky, M., Clinchy, B., Goldberger, N. & Tarule, J. (1986). *Women's ways of knowing: The development of self, voice, and mind*. New York: Basic Books.

Cooney, T., Brown, S., Dossey, J., Schrage, G. & Wittmann, E. (1999). *Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education*. Portsmouth, NH.: Heinemann Publishing Company.

Cooney, T., Sanchez, W., Leatham, K. & Mewborn, D. (2002). *Open-ended assessment in math: A searchable collection of 450+ questions.* Westport, CT: Heinemann Publishing Co. Tillgänglig 2006-05-10 på www.heinemann.com/math

Cooney, T., Shealy, B. & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 306–333.

Cooney, T. & Wiegel, H. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. I A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Red), *Second International Handbook of Mathematics Education*, (s 795–828). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Davis, B. (1999). Basic irony: Examining the foundations of school mathematics with preservice teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education 2*, 25–48.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser.

Dewey, J. (1916). *Democracy and education*. New York: The Free Press.

Freire, P. (1970). *Pedagogy of the oppressed*. New York: Herder and Herder.

Green, T. (1971). *The activities of teaching.* New York: McGraw-Hill.

Hancock, L. (1994). Coping with a mandate: Effects of a revised end-of-course test for first year algebra. *Dissertations Abstract International 58*, 483A. (University Microfilms. No. AAI9520826).

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givven, K., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P. & Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS video study*. Washington, D.C.: National Center for Educational Statistics.

Krainer, K. (2001). Teachers' growth is more than the growth of individual teachers: The case of Gisela. I F. Lin & T. Cooney (Red), *Making sense of mathematics teacher education* (s 271–294). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. New York: Cambridge University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.: Author.

Perry, W. (1970). *Forms of intellectual and ethical development in the college years*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Sanchez, W. (2001). *Conceptualizing mathematics teachers' use of open-ended assessment items*. Unpublished dissertation. University of Georgia.

Scheffler, I. (1965). *Conditions of knowledge.* Chicago: Scott Foresman and Company.

Senk, S., Beckmann, C. & Thompson, D. (1997). Assessment and grading in high school mathematics classrooms. *Journal of Research in Mathematics Education*, *28*, 187–215.

Skott, J. (2001). The emerging practices of a novice teacher: The roles of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*, 3–28.

Whitehead, A.(1929). *The aims of education*. New York: The Macmillan Company.

Wilson, P., Cooney, T. & Stinson, D. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education 8*, 83–111.

Wilson, M. & Goldenberg, M. (1998). Some conceptions are difficult to change: One middle school mathematics teacherís struggle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*, 269–293.

Wittmann, E. (1992). One source of the broadcast metaphor: Mathematical formalism. I F. Seeger & H. Steinbring (Red), *The dialogue between theory and practice in mathematics education: Overcoming the broadcast metaphor* (s 111–119). Bielefeld, Germany: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität.

Författare

Otto B. Bekken är førsteamanuensis i matematiske fag vid Høgskolen i Agder i Kristiansand, Norge.

Alan Bell har varit senior lecturer i mathematics education vid Shell Centre, University of Nottingham, England.

Morten Blomhøj är lektor i matematik vid institutionen för matematik och fysik (IMFUFA) vid Roskilde universitet, Danmark.

Hugh Burkhardt är professor i mathematics education och director för Shell/ MARS-gruppen vid University of Nottingham, England.

Maria Luiza Cestari är professor i matematikkdidaktikk vid Høgskolen i Agder i Kristiansand, Norge.

Barbara Clarke är associate professor i mathematics education vid Monash University, Melbourne, Australien.

Doug Clarke är professor i mathematics education och director vid Mathematics Teaching and Learning Centre, Australian Catholic University, Melbourne, Australien.

Thomas J. Cooney är professor emeritus i mathematics education vid University of Georgia, USA.

Rita Crust är senior designer-editor of materials i Shell/MARS-gruppen vid University of Nottingham, England.

Paul Ernest är professor i philosophy of mathematics education vid University of Exeter, England.

Rhonda Faragher är senior lecturer i mathematics education vid ACU National, Signadou Campus, Canberra, Australien.

Victor Firsov var professor vid Teacher Training Academy och vid Institute of Open Education, Moskva, Ryssland. Han avled våren 2006.

Gail Hood är forskare vid University of Wollongong, Australien, tidigare vid LessonLab, Santa Monica, USA.

Marja van den Heuvel-Panhuizen är senior researcher in mathematics education vid Freudenthal Instituut, i Nederländerna.

Darina Jirotková är senior lecturer in mathematics education vid fakulteten för lärarutbildning, Univerzita Karlova i Prag, Tjeckien.

Diana V. Lambdin är associate dean for teacher education och professor i mathematics education vid Indiana University, USA.

Stephen Lerman är professor i mathematics education vid London South Bank University, England.

Frank K. Lester är professor i mathematics education and cognitive science vid Indiana University, USA.

Graham Littler är professor emeritus i education vid University of Derby, England.

Vena M. Long är professor och associate dean of mathematics vid University of Tennessee, USA.

Alistair McIntosh är professor emeritus i mathematics education vid University of Tasmania, Australien.

Reidar Mosvold är førsteamanuensis i matematiske fag vid universitetet i Stavanger, Norge.

Daniel Pead är senior designer-editor of computer-based materials i Shell/MARS-gruppen vid University of Nottingham, England.

Rossella Santagata är director vid LessonLab Research Institute och biträdande professor vid University of California Los Angeles, USA.

Ingvill M. Stedøy är faglig leder vid Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen vid Norges teknisk-naturvitenskaplige universitet, NTNU, Trondheim, Norge.

Max Stephens arbetar vid University of Melbourne, Australien, i Faculty of Education: Science and Mathematics Education Cluster.

Malcolm Swan är senior designer-editor of materials i Shell/MARS-gruppen vid University of Nottingham, England.

Erich Ch. Wittmann är professor emeritus i matematikdidaktik vid Universität Dortmund, Tyskland.

Från
International Perspectives on
Learning and Teaching
Mathemaics

Introduction

BARBARA CLARKE, DOUG M. CLARKE,
DIANA V. LAMBDIN, FRANK K. LESTER
GÖRAN EMANUELSSON, BENGT JOHANSSON,
ANDERS WALLBY, & KARIN WALLBY

> In mathematics education, we have a field that is not as universal as mathematics has traditionally been understood to be, and we have research that often does not translate well from this classroom to a neighboring one, let alone one that might be half a world away. Nonetheless, mathematics education seems to be much like mathematics in its power to foster cooperation and collaboration across political boundaries.
> (Sierpinska & Kilpatrick, 1998, p. 547)

Today, most would agree that it is essential that all students learn mathematics in school and that mathematics education is devoted to the study of how students learn and how teachers teach. Of course, this description of what the field of mathematics education is about is far too simplistic; it also entails concern about the kinds of curriculum materials to use for instruction, the diversity of contexts and learners, how to assess student learning, what mathematics to teach and much more. 38 chapters in this volume were written by some of the most active and prominent scholars in the field, representing 13 countries – Australia, Austria, Czech Republic, Denmark, England, Germany, Iceland, Norway, New Zealand, Russia, Spain, The Netherlands, and the United States. The lead author of each chapter has contributed significantly over the past 20 years to Swedish mathematics education by coming to Sweden to collaborate with Swedish mathematics teachers, teacher educators, curriculum developers, and assessment specialists. The scope of their expertise clearly illustrates just how varied and complex the study of mathematics education has become. It also illustrates, as the quote above suggests, that mathematics educators around the world share an interest in collaborating to improve the state of mathematics learning for all students.

During the past several years, for many mathematics educators, thinking about the study of mathematics education has shifted from the view that learning is a cumulative process of gradually adding, deleting, and refining facts, rules, and skills to the view that it is a process of constructing knowledge to describe, explain, create, modify, and adapt complex systems occurring in the world. Also, as the view of the nature of mathematics learning has changed, so too have the ways we think about mathematics teaching, curriculum, and assessment. Today, the teacher's role is to engage students as active participants in "doing" mathematics. In other words, this new vision is one in which learning mathematics is seen as a cooperative venture in which students are encouraged to explore, make, test, verify, and debate conjectures; build connections among concepts; solve problems growing out of their explorations; and construct personal meaning from all of these experiences. Of course, as our views about student learning and the teacher's role have changed, so too have our ways of thinking changed about the nature of the sorts of curriculum materials we use, the kinds of assessments – both in the classroom and on a larger, perhaps national, scale – and the very goals of school mathematics.

International perspectives

This book is an outgrowth of a conference held in Lingatan, Sweden during the summer of 2003. Prominent mathematics educators from 13 countries outside of Sweden were asked to prepare papers to be presented at the conference addressing a variety of themes. (See the next section of this volume on International Perspectives for a list of these themes.) After the conference, the participants were invited to prepare papers based on their conference presentations to be compiled into a single volume. The volume is divided into seven sections. The first section, written by Göran Emanuelsson and Bengt Johansson, provides a brief overview of the chronology of events that stimulated the creation of this volume. This overview is especially important because it includes a discussion of the special challenges and opportunities facing Swedish teachers, teacher educators, curriculum developers, and policy makers as Sweden considers its place in a global community that grows more and more complex and driven by technology every day. This discussion serves the important function of situating the entire volume in the Swedish context.

Mathematics learning

The body of research on mathematics learning, teaching, curriculum, and assessment during the past 30 years – coming not only from education, but also from work in psychology, anthropology, and sociology – has solidly established the important roles of conceptual understanding and problem solving. More recently, research also has begun to show that mathematical modelling activities can facilitate learning and the construction of important mathematical concepts. Thus, it is fitting that the second and third sections of this volume deal with how to build students' understanding and the roles of problem solving and modelling in classroom instruction. The second section includes a set of seven chapters devoted to issues broadly related to the task of building students' understanding of mathematical ideas and processes and the third section contains a set of five chapters concerned with problem solving and modeling. A special focus of the chapters in these sections is on the research evidence that supports this new vision of mathematics learning and on how it might be realized in classroom practice. These chapters illustrate the solid research-base for the new view and provide thoughtful examples of classroom activities.

Section four is concerned with national and international assessments of mathematics achievement. The four chapters in this section should be read with the understanding that, even though assessments can give us only a glimpse at what students have learned, they can raise important issues about what mathematics is being learned in today's classrooms. Of special interest in three of these chapters is the issue of gender differences in mathematics learning.

The seven chapters comprising the fifth section, which deal with theoretical perspectives on mathematics learning, demonstrate that there are different levels at which to focus our thinking about mathematics learning. These papers show us that learning can be viewed as: (1) an individual enterprise, (2) a collaborative activity at both the classroom and school levels, and (3) a culturally determined phenomenon.

Mathematics teaching and teacher development

The emphases of the final two sections of the volume are on mathematics teaching and teacher development. There are many factors that influence student learning, but it is what teachers believe, what they know and the actions they take within and outside the classroom that provide the greatest influence on student understanding and confidence with mathematics. Unfortunately, many people and even some teachers believe that only a small percentage of students can succeed at mathematics. Those students from disadvantage backgrounds, those with learning disabilities, and those whose first language was not the language of use in instruction are seen as unlikely to develop as mathematical thinkers. However, we now know that all students can succeed in mathematics, given appropriate teaching and support.

As the body of research on the learning of mathematics has grown over the years, so too has the equivalent body of research on teaching. Research has supported a greater focus on teacher knowledge in its various forms, on ways of organizing the classroom, and on greater attention to the nature of discourse. Given the importance that is now attached to what teachers know and the decisions they make in planning, in discussion with students, in posing problems and in assessing what their students know and can do, it is not surprising that there has been increased attention to those forms of preservice and inservice teacher education that are most likely to support teacher professional growth over time. There has been a move away from "one-shot" professional development to a collaborative, ongoing approach. International studies of mathematics achievement such as the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) have drawn the attention of the world to interesting and exciting differences in content, pedagogy and assessment, as all countries seek to teach in the most effective ways, while recognizing local goals and contexts and understanding that mathematics is not culture-free.

The seven chapters making up section six focus on the need for mathematics teachers to respond appropriately to contexts, in their planning, in their interactions with students, and in their choice of learning and assessment tasks. Insights are shared on the effects of different grouping practices on mathematics achievement, appropriate curricula for adult learning, the notion of mathematical discourse in different languages, the challenges of working with students with special needs, teacher beliefs, and student confidence. In each case, the research offers implications for the practitioner.

In the final section, eight chapters address issues associated with making the classroom more learner-centered. In several cases, video studies of classrooms of effective teachers provide a basis for discussion. Teacher beliefs, teacher knowledge and teacher judgment are all seen to contribute to classrooms where teachers aim to find out all they can about their students, their knowledge, their mathematical processes (problem solving, communication, the connections they make), and their mathematical dispositions. Equipped with such knowledge, teachers are then in a position to create classroom environments that can enable all students to develop into confident and capable learners of mathematics.

Mutual benefit

The high level of international collaboration among mathematics educators that has occurred in Sweden for the past 20 years serves as an illustration of how to build upon the growth in our understanding of issues and problems in mathematics education that has taken place world-wide. The Swedish National Center for Mathematics Education has continued this tradition by sponsoring the conference that led to the preparation of this book. One particular result of the discussions that took place during the conference and continued as the book was being prepared is the realization that there has been a reciprocal character to this long-term collaboration; both Swedish and non-Swedish mathematics educators have benefited. The high level of international discourse that has been taking place around issues and problems of mathematics education is certain to have long-term benefits for both students and teachers around the world.

Reference

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. I A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Red), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (s 527-548). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics

Abstracts

1. INTERNATIONAL PERSPECTIVES

Göran Emanuelsson & Bengt Johansson

Stimulating Mathematics Education in Sweden

In this chapter we give a brief history of the collaboration between mathematics educators in Sweden and several other countries that began 20 years ago, documented in our journals and conference proceedings. The strength of this long term cooperation was demonstrated by the Midsummer Conference. Because the conference was organized and sponsored by the National Center for Mathematics Education (NCM), we give a description of the goals and activities of the NCM. We conclude with a short discussion of some of our ideas and plans for the near future. In an appendix you will find an overview of the Swedish school system and the national curricula with references to English versions of the mathematics course syllabi available on the internet.

2. BUILDING CHILDREN'S UNDERSTANDING

Doug M. Clarke

Issues in The Teaching of Algorithms in the Primary Years / Algoritmundervisning i tidiga skolår

Diana V. Lambdin, N. Kathryn Essex, Paul E. Kehle & Kelly K. McCormick

What Are American Elementary Students Learning?

In the 1990s, an independent educational research group (TERC) developed innovative curricular materials for teaching elementary school mathematics (for kindergarten through grade five), financed by a grant from the US government's National Science Foundation. These materials involve a very different pedagogy from the traditional American approach to mathematics instruction, by emphasizing student investigation and problem solving in context as recommended in standards documents published by the National Council of Teachers of Mathematics. The first part of our chapter provides an illustration of the sort of investigative mathematics embodied in the TERC materials. In the second part of the chapter, we describe the longitudinal, focused, comparative research study involving approximately 2 100students in grades 1–5 that we are initiating to document the effectiveness of the TERC materials. We identify the logistical and design principles guiding our work, as well as the issues we have confronted in designing the study. Deciding upon the appropriate mix of schools, teachers, students, curricula, and assessments is a complex task, posing many challenges for a reliable and valid evaluation.

Graham Littler & Darina Jirotková
Learning about Solids /
Att lära om geometriska kroppar

Alistair McIntosh
Re-orienting the Teaching of Computation /
Nya vägar i räkneundervisningen

Sydney L. Schwartz
Explorations in Graphing with Pre-kindergarten Children

This research report of an exploratory field study describes mathematical understandings and skills of inner-city four-year-olds reflected in their initial experiences of collecting information about questions they generated, recording the data using their own form of graphic, alphabetic and numeric notations, and interpreting the recorded data. The analysis of children's work reveals an unexpected range of mathematical understandings and skills for four year old children. The logical thinking skills and growing number sense evidenced in their work as they recorded data includes (1) coordinating one response to one data entry, (2) sorting and grouping recorded information, (3) transforming information from verbal responses and concrete materials collections into graphic formats, (4) using a variety of ways to represent information, and (5) using number to summarize findings and interpret results. In conversation with adults, children demonstrated varying levels of ability to interpret their recorded findings, identify missing information, and plan changes in their recording strategies. The study shows that many inner-city four-year-olds have sufficient logical thinking skills and mathematical understandings to support the introduction and expansion of data recording experiences leading to graphing within the context of a developmentally appropriate prekindergarten curriculum. The activities described in the study flow from children's interests and represent a genuine integration of mathematics and literacy with science and social studies.

Max Stephens
The Importance of Generalisable Numerical Expressions /
Generalisering av numeriska utsagor

Erich Wittmann
Assessing Preschoolers' Geometric Knowledge /
Att undersöka barns geometrikunskaper

3. PROBLEM SOLVING AND MODELLING

Alan Bell, Hugh Burkhardt, Rita Crust, Daniel Pead & Malcolm Swan
Strategies for Problem Solving and Proof /
Strategier för problemlösning och bevis

Morten Blomhøj
Mathematical Modelling – a Theory for Practice /
Mathematisk modellering – en teori för praktik

Frances R. Curcio
Reading and Mathematics: A Problem Solving Connection

This chapter addresses (1) the need to develop content area reading skills in mathematics for native speakers and non-native speakers of any language, but in particular, English; and (2) ideas for instruction that promote improving students' reading-in-mathematics skills for solving mathematics word problems. The two main sections consist of (1) a brief report describing an action-research project examining an instructional intervention in which twelve-year-old seventh graders were taught specific strategies for reading mathematics, yielding positive results supporting the teaching of reading-in-mathematics skills; and (2) classroom material that provides examples for integrating the teaching of reading in mathematics.

Darina Jirotková
Grid-paper Geometry /
Geometri på rutat papper

Frank K. Lester & Diana V. Lambdin
Teaching Mathematics through Problem Solving /
Undervisa genom problemlösning

4. LEARNING FROM ASSESSMENTS

Gunnar Gjone
Diagnostic Assessment and Teaching in Mathematics /

The Quality in Mathematics Education project (KIM) has produced diagnostic materials for various parts of school mathematics; the project also has a research component. We collected an extensive amount of data, which enabled us to develop national profiles of students' concepts in certain areas of mathematics. With the publication of the tests by the National Board of Education, guidelines for teaching were also produced. These guidelines contain both analysis of the answers as well as activities for students. In this chapter, I present and discuss examples of the materials (tests and teacher guidelines). The research part of the project was carried out mainly by students who were writing dissertations for their extended master's degree. They studied various aspects of students' conceptions in algebra, volume, number, graphs, and measurements and found some interesting structures. Some of these findings are presented here, as well as some recent analysis.

Liv Sissel Grønmo

Are Girls and Boys to be Taught Differently?

This chapter looks at gender differences among Norwegian students in achievement, attitudes, and self-concept based on data from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) in 1995. TIMSS in Norway collected data from 6 different grade levels in school in 1995, from 9 years old students to students in the last year of upper secondary school. Norway exhibited the largest gender differences in achievement in mathematics literacy for students' last year of upper secondary school. Significantly gender differences were also found in attitudes towards mathematics for 13 years old students. Generally Norwegian girls had more negative attitudes and a lower self-concept in mathematics compared to boys during puberty than what they had when they were younger or older. Some results from OECD Programme for International Students Assessment in 2000 (PISA-2000) in reading literacy will also be presented. 15 years old students in Norway displayed larger gender differences in favour of girls than in most other countries both in achievement and in attitudes, and greater than in the IEA study Norway participated in in 1991. The consequences of free choice of subjects in school and the issue of whether girls and boys should be taught differently are two questions that will be discussed. Other important issues are communication in the classroom, including the issue of who are responsible for teaching students how to read in mathematics.

Marja van den Heuvel-Panhuizen

Girls' and Boys' Problems / Flickproblem och pojkproblem

Gilah C. Leder

Mathematics, Gender, and Equity Issues – Another Perspective

Mathematics, gender, and equity issues have attracted considerable attention in recent decades and substantial funds and energy have been spent on intervention programs aimed at addressing inequities in mathematics learning. In Sweden, too, substantial funds have been spent on intervention programs to combat gender inequities (see e.g., Brandell, Nyström, Staberg, & Sundqvist, 2003; Grevholm, Sigstam, & Vretblad, 2001). Yet Swedish data from the large Third International Mathematics and Science Study [TIMSS] study, like those from many other countries, indicate that subtle gender differences in mathematics performance persist. For students in grade 8, little difference was found in the performance of males and females. In fact, the gender differences reported were among the smallest found in the participating countries. In contrast, for students in the final year of secondary school, the difference in performance of males and females was statistically significant for both the Mathematics Literacy and Advanced Mathematics Achievement papers. In this chapter, data are presented from a high stake end-of- school examination to illustrate that the format of assessment can contribute to apparent gender differences in mathematics achievement. An example of an innovative task on which on average girls performed better than boys is included.

Guðmundur Birgisson

Perceptions of Truth

This chapter describes a study of university students' epistemologies of mathematics. Six freshmen who were enrolled in a second semester calculus class for honors students at an American university were interviewed and their work on selected problems was analyzed. The results of the study were used to develop a model of students' epistemologies. The model has five categories, five possible worlds in which the students feel they are while doing mathematics. The five worlds are: The Experiential World, the World of Concepts, the World of Language, the World of Formal Mathematics, and the World of Real Mathematical Objects. The study's implications for mathematics teaching and learning are discussed, and the author describes an activity teachers can use to address epistemological issues in their mathematics classes.

Leone Burton

Learning as Research

Here I outline some results from a major study on mathematicians coming to know through research and compare their epistemology as researchers with that driving traditional, transmission teaching. I challenge learning stereotypes held by mathematicians, teachers and more generally those in society with respect to homogeneity and "ability", discuss culture and then examine the learning style of the mathematicians which I call enquiry-based learning, focusing on learner agency and discourse. In section 2, I apply these approaches to mathematics learning in classrooms.

Willi Dörfler

Objectifying Relations: Fractions as Symbols for Actions

Fractions and rational numbers in mathematics enjoy the status of abstract objects which are represented by symbols or diagrams to which operations can be applied. The field Q is the general-abstract expression of this view. In this paper, a hypothetical learning trajectory is presented which is first a model for a theoretically conceivable cognitive development and second an epistemological reconstruction of the genesis of rational numbers as objects. This trajectory is a pathway leading from material actions via their symbolizations to the abstract objects which are conceived as types of symbols. Further, it is organized and informed by the view of fractions and rational numbers as relationships and by the notion of protocols of actions. Rational numbers emerge as an abstract way of speaking about a complex network of actions, symbols and operations with those symbols. Thereby the complexity of this concept is underlined and explicated.

Paul Ernest
Relevance versus Utility / Relevans och nytta

Victor Firsov
Interest in Mathematics: Is It Necessary? / Måste man vara intresserad av matematik?

Stephen Lerman
Learning How to Be in the Mathematics Classroom / Att vara matematisk i klassrummet

Luis Rico & Francisco Ruiz
Geometric Visualization of Additive Operators

The work presented in this chapter is a part of a wider investigation in which didactical and mathematical possibilities of the Table-100 (one hundred chart) are studied with the approach of visual-geometric representations for arithmetic and algebraic concepts. It is a proposal of curricular innovation and an exploratory study within a Preservice Primary Teachers' Training program. The aims of the research include the following emphases:

1. The confidence and interest in learning mathematics and in the use of mathematics.
2. The value and use of several representations for different purposes and contexts.
3. The support of learning mathematics by means of teaching aids and artefacts.

We have chosen for our focus a table with the numbers from 1 to 100, organized in rows and columns, which is known as the Table-100 (Figure 1). When diverse paths on the one hundred chart are visualized, a visual-geometric representations for the additive operators appears. We show some of the notable algebraic aspects that arise when we study those additive operators by means of a sort of polyminoes, useful to visualize such operators. To obtain such results it is necessary to take into account the characterization of the one hundred chart and its different interpretations (numeric, geometric and algebraic), which is discussed in Sections 2 to 6. The results discussed in this chapter arise from a wider empirical and theoretical investigation carried out with students in the third course of the preservice program.

Bill Barton

Mathematical Discourse in Different Languages

The study of mathematical discourse in different languages offers insights into alternative mathematical conceptions. It also highlights the role of imagination in the development of mathematics, and raises questions about the learning of mathematics. It is concluded that there are pedagogical opportunities to be exploited in the relations between language and mathematics. In particular, there are language-derived alternative ways of approaching aspects of conventional mathematics. In this chapter, recent research into the everyday discourse of quantity, relationships, space, and change in some non-Indo-European languages is described. Some of these research insights are transformed in to practical classroom activities.

Barbara Clarke & Rhonda Faragher

Possibilities Not Limitations: Teaching Special Needs Children / Möjligheter – inte begränsningar: Att undervisa barn med särskilda behov

Marj Horne

Class Grouping for Mathematics: What Do We Know?

There are many different ways of organising classes and groups within classes. A recent large scale study of children in the first three years of school in Australia showed that there were some concerning differences in outcomes emerging from different ways of forming classes. Once within the class, however, teachers used a variety of forms of group organisation and ways of assigning students to groups. A study of effective teachers showed that they all used group work and a variety of forms of group organisation within the class but that both the type of group and the use varied according to the purpose and the class needs. The strategies the effective teachers used included more open tasks, including open questions and games, which allowed children from a variety of mathematical background to all achieve at a level appropriate for them. They also encouraged the children to reflect on their own learning.

Anna Kristjánsdóttir

Confidence in Mathematics Learning

Students' confidence when learning mathematics has been a focus of research from many perspectives, including gender, and minority and disadvantaged groups. Confidence has also increasingly been linked to learning mathematics in general. The word confidence sounds acceptable and sympathetic, partly because of its generality and a variety of possible interpretations. This on the other hand can be somewhat problematic when using it in connection with mathematics learning and mathematics teaching. It is therefore necessary to clarify, in such cases, what is special about learning mathematics and what sort of confidence is important there. It is furthermore important to take into consideration the kinds of mathematically cultural influences the student encounters both in school and home. When moving mathematics learning in school from a transmitting/drilling character to a constructing/arguing type, several factors that link mathematics to society and culture become important. For gaining and sustaining confidence in learning mathematics the meaning making process demands attention. One can talk about ”the triad in mathematics learning” , consisting of teacher (school), student and parents (outer community). The conceptions of mathematics and mathematics learning may differ considerably between the three, without ever having been explored or discussed, as can be seen from the survey reported on in this chapter. For a student exposed simultaneously to such different belief-structures or cultures of mathematics and mathematics learning, it can be very difficult to build up and sustain both understanding and confidence in learning mathematics. A problematizing stage and much further exploration and research is necessary.

Lena Lindenskov

What Do We Mean by Everyday Mathematics in Adult Education?

The term ”everyday mathematics” is applied frequently in mathematics education and in mathematics courses, but with different meanings. ”Everyday mathematics” may be used as a title for programmes, national curricula, and mathematics textbooks, as well as a cover for different types of frameworks. Course mathematics provides special pictures of everyday mathematics when phenomena, things, and activities from arenas outside education are represented in learning materials and in communication in the classroom. The educational intention of these representations is to support learners' motivation, cognition and competencies, but teachers and learners interpret differently the representations. The pictures invoked by these representations can be sources of misunderstandings between teachers and learners. Learners could experience a lack of meaning, as well as a hindering of confidence and interest. A third way of using the term is as label for ”real world” mathematics, also known as folk mathematics, street mathematics and ethno-mathematics. ”Everyday mathematics” as practice includes inspiration for learning mathematics, which could be much more explored and utilised in future courses. In this chapter the three categories titles, pictures and practices will be discussed in the context of curriculum development for mathematics in adult education. I shall also exemplify how tasks and activities can be reformulated from pictures to practices in order to support adults learning mathematics.

Vena M. Long

Adding ”Place” Value to Your Mathematics Instruction / Platsvärde i lokal matematik

Dave Tout

Curriculum Frameworks and Change

This chapter looks at the development and use of a new mathematics curriculum framework for the teaching of adults, and how it has influenced and impacted on teaching practice. The Certificates in General Education for Adults (CGEA) are a nationally accredited competency based Australian curriculum, where the numeracy and mathematics learning outcomes are based on the purpose and use of mathematics in a variety of contexts. This same framework is now being used as an alternative mathematics curriculum for senior students in secondary schools. This numeracy and mathematics framework is based on an explicitly stated view of numeracy and mathematics. This chapter looks at some of the developments and issues behind the use of this curriculum, and how it has impacted on teachers and their teaching practice.

7. TOWARDS LEARNER CENTRED TEACHING

Otto B. Bekken & Reidar Mosvold

Reflections on a Video Study /
Reflektioner kring en videostudie

Maria Luiza Cestari, Rossella Santagata & Gail Hood

Teachers Learning from Videos /
Lärare lär från video

Thomas J. Cooney

Pluralism and the Teaching of Mathematics /
Många sätt att se på matematik och undervisning

Barbro Grevholm

Mathematics Worth Knowing for a Prospective Teacher?

Teacher education from a Norwegian perspective will be discussed and related to recent research from Sweden. In Norway there is great concern regarding the lack of mathematical competence in relatively young, newly educated teachers and the need for in-service teacher education in mathematics. In Sweden, one group of student teachers in a program for year 4 – 9 mathematics teachers in K-town was studied from 1996 to 2003. Questionnaires, interviews, audiotape recordings and videos from presentations and lectures, concept maps, essays, and examination papers offer a rich database about the knowledge construction of these students. In the chapter, I will give examples of what mathematical knowledge the students in Sweden build up and compare it to the situation in Norway. How does the knowledge relate to what is needed in the compulsory school classroom? One crucial aspect is the development of a professional language, which is not mentioned explicitly in the curriculum of the study programs. Another aspect is the need for flexible thinking, allowing teachers to follow different student reasoning. The results from Sweden will be compared to relevant results from Norway. Can Sweden learn from Norway and vice versa?

Ingvill M. Holden/Ingvill M. Stedøy
How to Become an Excellent Mathematics Teacher /
Hur blir man en duktig matematiklärare?

Frank K. Lester, Kelly McCormick & Ayfer Kapusuz

Pre-service Teachers' Beliefs about the Nature of Mathematics

Research suggests a strong relationship between what teachers believe about mathematics and teaching mathematics and the way they teach. However, we know very little about the relationship between teachers' beliefs and what they know about mathematics and how to teach it. For the past two years, we have been conducting research concerning the mathematics beliefs and conceptions of preservice elementary teachers. In this chapter, we describe how we have been doing this research and report some preliminary results of this on-going study.

Kay Owens

Improving the Teaching and Learning of Space Mathematics

This chapter presents results from two studies implementing a framework of space mathematics that emphasised investigating and visualising together with describing and classifying. Two key ideas were (i) part-whole relationships and (ii) orientation and motion. A number of schools participated in the project and many lessons were developed. While early primary school classes were used, the lessons are applicable to higher levels of primary school too. Teacher knowledge and their feedback on the lessons and program were evaluated. Some classroom scenarios together with the lesson plans will illustrate the value of teachers using questioning and concrete material. When teachers were clear about the purpose for lessons they could facilitate deeper understanding by students. Videotapes helped teachers understand the framework. Teachers were also provided with some task-based interview schedules to assist them in assessing their students' knowledge before they started. They worked with facilitators who worked in the classrooms and modelled good teaching practice.

Thomas A. Romberg

Classroom Assessment Studies

This chapter summarizes information about the features of the change strategy as derived from several studies designed to document how teachers monitor each student's progress toward important mathematical goals, to identify the problems and impediments that teachers faced as they attempted to implement assessments consistent with the reform perspective about teaching for understanding, and to design professional development that focused on these issues. This change strategy also requires professional judgment in the analysis of student performances. In mathematics the knowledge required for analyzing student performances includes knowledge of the content domain, understanding of students' thinking, awareness of possible solution strategies, and developmentally appropriate expectations for performance quality.